Institucion Educativa

JUAN PABLO I

La Llanada Nariño.

MODULO 1

Matemáticas

11

Colombia aprende
La red del conocimiento

ALCALDÍA MUNICIPAL
LA LLANADA
NIT: 800.149.894-0
Comprometidos con la comunidad

Gobernación de Nariño
¡EN DEFENSA DE LO NUESTRO!

b. Ejemplo:

c. Ejemplo:

d. Ejemplo:

Nota: El intervalo (-∞,∞) = R

Operaciones con Intervalos:
Sean A=(-1,5); B=[-3,2]; M=(1,7]; Q=(-∞,4)

Hallar:
a. AUB   b. Q∩M   c. BUQ   d. A-B   e. (BUM)-Q

Ejercicio:
Si A=(-3,4); B=[-1,3); M=(-5,-3]; Q=(1,∞)

Hallar:
a. BUQ b. A∩M c. BUM d. A∩Q e. A-B

INECUACIONES EN R

Es una desigualdad en la cual figura una o más incógnitas. Ejemplo:

1. $3x - 2 > 7x + 6$
2. $4m^2 - 7m + 8 \geq 5m - 3$
3. $\frac{5x-3}{4x-1} < \frac{7}{2}$
4. $(5x + 6)(3x - 2) < 0$
5. $x^2 + 1 > 0$

Solución de Inecuaciones:

Consiste en encontrar el conjunto de números reales que satisfaga la desigualdad.

Desigualdad: Es una expresión en la cual se ligan números reales a través del orden $<$ ó $>$ (menor que o mayor que)

Definición:

1. Un número x es positivo si está a la derecha de 0 y se escribe $x>0$, un número x es negativo cuando está a la izquierda de 0 y se escribe $x<0$.

2. Dados a,b números reales, se dice que a es mayor que b si la diferencia entre a y b es positiva, es decir $a>b$ si $a-b>0$

Propiedades: Sean a,b,c,d ∈ R

1. Si $a<b, \Rightarrow a+c < b+c$
Ejemplo:

2. $a<b$ y $b<c \Rightarrow a<c$ (Transitiva)
Ejemplo:

3. Si $a<b$ y $c>0 \Rightarrow a.c<b.c$
Ejemplo:

4. Si $a<b$ y $c<0 \Rightarrow a.c > b.c$
Ejemplo:

⟶ *Cuando multiplicamos por un número negativo, la desigualdad*

Ejemplos: Resolver las siguientes Inecuaciones:

1. $5x - 3 \geq 7$

2. $7x - 3 > 10x + 5$

3. $\frac{4x-5}{6} - \frac{7x+2}{4} \leq \frac{5x-3}{3}$

4. $2x^2 - 2x - 6 < x^2 + 2$

5. $3x^2 - 7x - 4 \geq 2x^2 - 2x - 10$

6. $\frac{5x-3}{4x-1} - \frac{7}{4} \leq \frac{5}{2}$

7. $\frac{7}{2x-5} < 0$

8. $5x - 3 \leq 7x - 9$

9. $(5x-3)^2 - 9x^2 + 4x - 6 > 5x(3x+2) - 29x - 9$

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Definición: Sea *f: R→R U {0}* tal que:

$$x \to f(x) = \left\{ \begin{matrix} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{matrix} \right\}$$

Ejemplos:

a. $|8| =$
b. $|-6| =$
c. $\left|\frac{8}{3}\right| =$
d. $\left|\frac{-7}{4}\right| =$
e. $|0| =$

f. $|x-3| = \left\{ \right.$

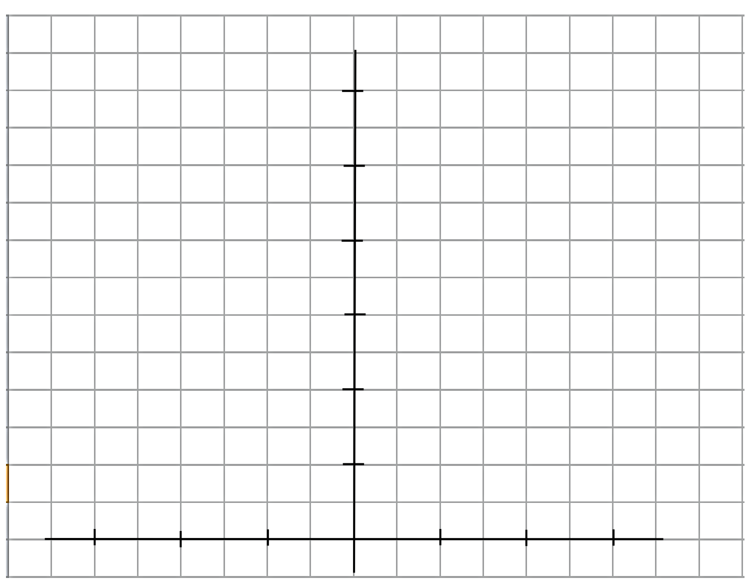
Gráfica de la función absoluto:

1. Representar gráficamente la función: $f(x) = |3x + 2|$

Recordemos que la función lineal tiene la forma $y = mx + b$ y su gráfica es una línea recta, donde: m: pendiente de la recta
b: punto de corte con el eje y

Solución: tabulamos

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y							

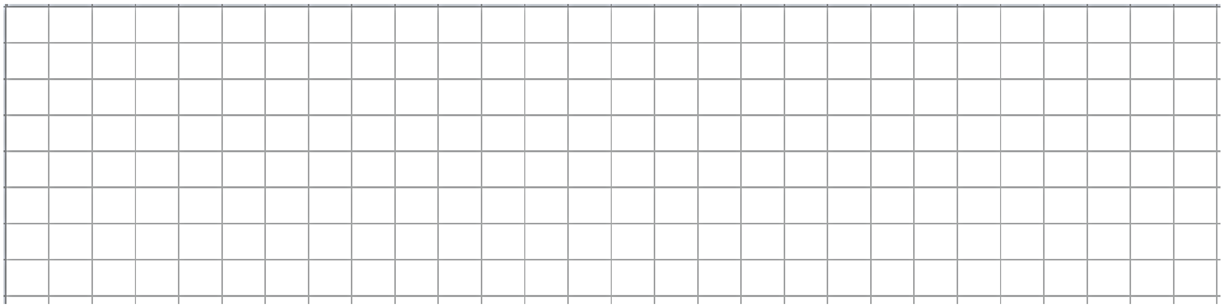


Para el punto de corte de la gráfica con el eje x

$\Longrightarrow$

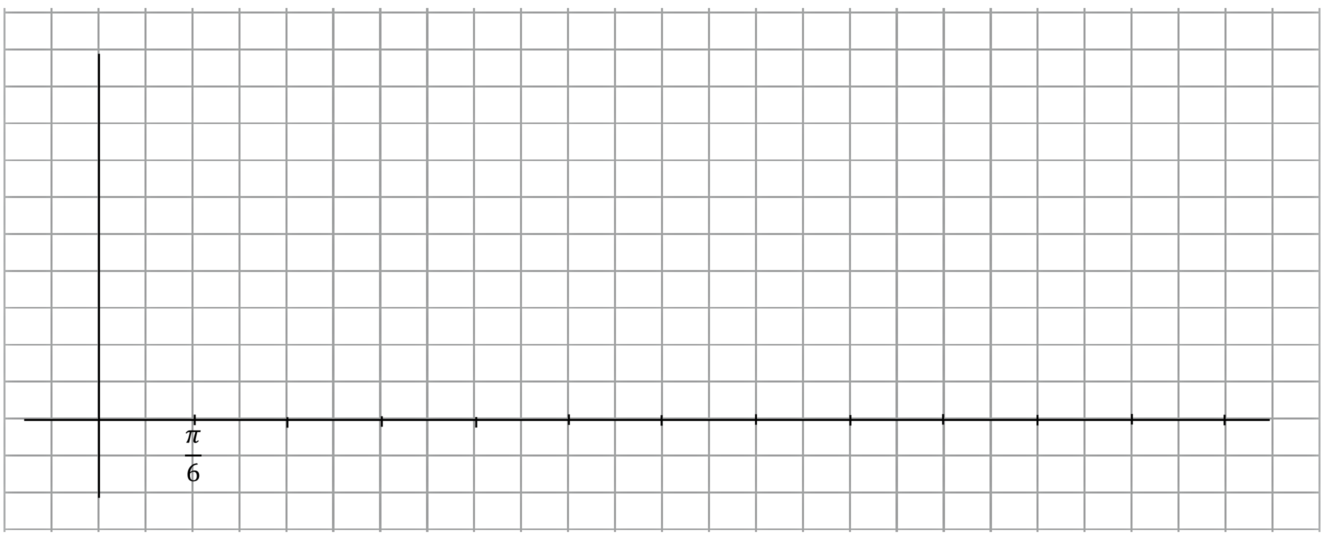
2. $y = |x^2 - x - 6|$

Solución:



3. Grafique: $y = |senx|$

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
y													



Propiedades del valor absoluto:

1. $|a| \geq 0$

2. $|a| = 0 \quad \Leftrightarrow a = 0$

3. $|ab| = |a||b|$

4. $|a|^2 = a^2$

5. $|a| = |-a|$

6. $|a + b| = |a| + |b|$

7. $|x| = b \;\; si \;\; x = b \;\; \vee \;\; x = -b; \;\; b \geq 0$

8. $|x| = |b| \;\; si \;\; x = b \;\; \vee \;\; x = -b$

9. $|x| < a \;\; si \;\; -a < x < a; \;\; a > 0$

10. $|x| > a \;\; si \;\; x > a \;\; \vee \;\; x < -a$

Solución de ecuaciones con valor absoluto:

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe utilizar una de las siguientes propiedades correspondientes ya sea la 7 ó 8.

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $|2x-3|=4$

2. $|3-x|=|1+2x|$

3. $|x^2+4x-3|=2$

4. $|\log(x^2+3)| = 2$

5. Resuelva $|5^x - 3| = 22$

6. Resuelva $|x - 5| = 0$

7. $|8x - 5| = 3x - 7$

Solución de Inecuaciones con Valor Absoluto

Para resolver inecuaciones con valor absoluto aplicaremos las siguientes propiedades

1. $|x| < a \quad si \quad -a < x < a; \;\; a > 0$

2. $|x| > a \quad si \quad x > a \;\; \vee \;\; x < -a$

3. $x^2 < a^2 \quad si \quad |x| < a$
   $= -a < x < a$

4. $x^2 > a^2 \quad si \quad |x| > a$
   $= x > a \;\; \vee \;\; x < -a$

5. $|x| \leq |a| \;\Leftrightarrow\; x^2 \leq a^2$

Ejemplo: Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $|2x - 3| < 5$

2. $|2x - 3| + 5 \leq 0$

3. $\left|\frac{4-7x}{3}\right| < \frac{5}{4}$

4. $|8x-5| \geq -2x-3$

5. $|5x - 7| < 2x + 1$

6. $|5x - 3| \leq |3x + 5|$

UNIDAD 6: SUCESIONES:

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y el codominio es el conjunto o subconjunto de los números reales.

$$f: N \to R$$
$$n \to f(n)$$

Ejemplo: sea $f(n) = n^2, n \in N$

Tabulemos algunas parejas de la función

n	1	2	3	4	5	…n
n^2						

a_2: representa el segundo término de la sucesión
a_4: representa el cuarto término de la sucesión
a_n: representa el término n-ésimo y es el que determina la ley de ordenación de la sucesión.

En este ejemplo el término n-ésimo está dado por **$a_n=n^2$**

Para encontrar un valor cualquiera de la sucesión se reemplaza en su término n-ésimo

Ejemplo: Para la anterior sucesión calcular a_7
$\Rightarrow$

Progresión Aritmética: Es una sucesión donde cada término de con excepción del primero se lo obtiene sumándole al término anterior una cantidad constante llamada diferencia aritmética.

Son progresiones aritméticas las siguientes:
1. 3, 5, 7, 9, 11, …   d=
2. 6, 4, 2, 0, -2, -4, …   d=
3. $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, ...$ d=

Al primer término de la progresión aritmética se lama base de la progresión.
La diferencia puede ser positiva o negativa. Si es positiva la progresión es creciente, en caso contrario es decreciente.

Cálculo del término a_n (n-ésimo):
Conocida la base de la progresión $a1$ y la diferencia d, se puede calcular el término n-ésimo así:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Ejemplo: Calcular a_{20} de la P.A: 3, 9, 15, 21

Ejemplo: Calcular a_n de la progresión: 3, 7, 11

Ejercicio 6.3:

1. Encontrar el término indicado en las siguientes P.A
a. a_{30} de la progresión 2, 7, 12, 17, 22
b. a_{10} de la P.A $a_n = 2n + 6$

Solución:

2. Determinar si las siguientes progresiones son aritméticas y si lo son determinar la diferencia:
a. 1, 3, 5, 7, 9, 11 …
b. 3, 7, 11, 15, 19, …
c. 1, 3, 9, 27, …
d. $\frac{5}{2}, \frac{8}{2}, \frac{11}{2}, \frac{14}{2}, \ldots$

3. Calcular el término n-ésimo de las siguientes sucesiones:
a. 3, 4, 5, 6, …
b. 11, 2, -7, -16, …
c. $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \ldots$
d. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$

Solución:

Suma de los términos de una P.A

Se aplica la siguiente fórmula: $Sn = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Ejemplo: Calcular la suma de los primeros 10 términos de la P.A. 2, 4, 6, 8, 10, …

Solución: Datos: $a_1=2$, $n=10$ $a_{10}=?$ $S_n=?$

Ejercicio: Sumar los primeros 50 números impares: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots$

Solución:

Progresión Geométrica: Es una sucesión numérica donde cada término después del primero se lo obtiene multiplicando al término anterior por una cantidad constante llamada razón de cambio (r).

Son progresiones aritméticas las siguientes:

1. 1, 3, 9, 27,… $r =$
2. 16, 8, 4, 2, 1, 1/2,… $r =$

Si la razón de cambio es mayor que 1 la progresión es creciente, si la razón de cambio es mayor que 0 y menor que 1 (fracción propia) entonces la progresión es decreciente.

Cálculo del término a_n (n-ésimo):
Conocida a_1 y conocida la razón de cambio r, se tiene:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Ejemplo: Calcular a_6 de la P.G 2, 4, 8, 16,…

Ejemplo: Encontrar el término n-ésimo de la sucesión 2, 4, 8, 16,…

Ejercicio 6.4:
1. Encontrar el término n-ésimo de las siguientes P.G.
a. 2, 6, 18, …
b. 81, 27, 9, …

Solución:

2. Calcular el término indicado en las siguientes P.G.
a. a_{20} de la P.G 5, 10, 20, …
b. a_{15} de la P.G 4, 2, 1, …

Solución:

Suma de los términos de una P.G

Se aplica la siguiente fórmula: $Sn = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

Ejemplo1: Hallar la suma de los primeros 9 términos de la P.G. 5, 10, 20, …

Ejemplo2: Dados $S_n=93$, $a_1=3$ y $r=2$, determine n

Solución:

Problemas de Aplicación:

1. María Torres recibe un salario inicial de $25.000, y se le promete un auento de $1.200 al término de cada uno de los siguientes 8 años. Determinar su salario durante el octavo año de trabajo

2. Un joven ahorra cada mes $500 más de lo que ahorró el mes anterior. Si comienza el primer mes con $2000, al cabo de 5 años, ¿cuánto sumarán sus ahorros?

3. Suponga que alguien le ofrece un centavo el día 1, 2 centavos el día 2, 4 centavos el día 3, 8 centavos el día 4 y así sucesivamente durante un mes de 30 días.
a. Calcule el monto que recibirá el día 30
b. Calcule el monto total que recibirá al final de los treinta días.

Solución:

En síntesis para hallar el término n-ésimo tenemos:

P. Aritméticas: $an = a_1 + (n-1)d$
P. Geométricas: $an = a_1 . r^{n-1}$

En la práctica hay que tener en cuenta también las sucesiones básicas:

Pares: 2n
Impares: 2n-1

1. $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$
2. $\{n^3\} = \{1, 8, 27, 64, 125, \dots\}$
3. $\{2^n\} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots\}$
4. $\{3^n\} = \{3, 9, 27, 81, 243, \dots\}$

Ejemplo:

1. Hallar el término n-ésimo de la sucesión: $\{an\} = \left\{\frac{7}{3}, \frac{11}{5}, \frac{15}{9}, \frac{19}{17}, \frac{23}{33}, \dots\right\}$

2. Hallar el término n-ésimo de $\{an\} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{24}{5}, \dots\right\}$

3. Hallar el término n-ésimo para la sucesión: $\{bn\} = \{27, 64, 125, \ldots\}$

Solución: $\{bn\} =$

4. $\{an\} = \left\{\frac{5}{2}, \frac{9}{8}, \frac{17}{26}, \frac{33}{80}, \ldots\right\}$

Solución: Para el numerador: $an =$
Para el denominador: $an =$

Por lo tanto: $\{an\} =$

Clases de Sucesiones:

Se definen las diferentes clases de sucesiones según el carácter de sus términos así:

Sucesión creciente: cuando $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n \quad \forall n \in N$

Sucesión decreciente: cuando $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_{n-1} > a_n \quad \forall n \in N$

Sucesión constante: si $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = a_n \quad \forall n \in N$

Sucesión alternante: Si sus términos van en forma alternada respecto al signo. Estas sucesiones se las identifica porque figura en el término an (n-ésimo) el factor alternante $(-1)^n$ ó $(-1)^{n+1}$

Ejemplo: 1. $\{an\} = \{2, -5, 8, -11, 14, \ldots\}$

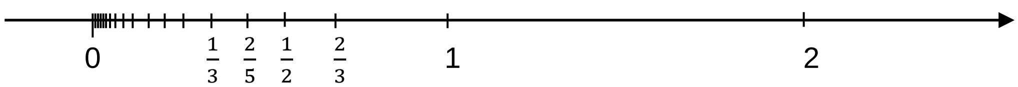
2. $\{an\} = \{-4, 16, -64, \ldots\}$

Sucesión Acotada:

Consideremos la siguiente sucesión:

$$\{an\} = \left\{\frac{2}{n}\right\} = \left\{2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{500}, \ldots, \frac{1}{500.000}, \ldots, \frac{1}{500.000.00}, \ldots, \frac{2}{n}\right\}$$

Cotas superiores:											
Cotas inferiores:											



Supremo:											
Ínfimo:											

<u>Definiciones:</u>

1. Cota Superior: Diremos que el número real “M” es cota superior de una sucesión $\{an\}$ si se cumple que $M \geq an\ \forall n \in N$

2. Cota Inferior: Diremos que el número real “m” es cota inferior de una sucesión $\{an\}$ si se cumple que $M \leq an\ \forall n \in N$

3. Supremo de una sucesión: Llamaremos supremo de una sucesión a la menor cota superior.

4. Ínfimo de una sucesión: Llamamos ínfimo de una sucesión a la mayor cota inferior.

5. Sucesión acotada: Una sucesión $\{an\}$ es acotada si tiene supremo e ínfimo.

NOTA: Si una sucesión tiene únicamente supremo se dice entonces que está acotada superiormente y si tiene únicamente ínfimo se dirá que está acotada inferiormente.

Ejemplo: Determinar si hay supremo e ínfimo de la siguiente sucesión:

$$\{an\} = \left\{\frac{5n-3}{2n+1}\right\}$$

$$\left\{\frac{5n-3}{2n+1}\right\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{7}{5}, \frac{12}{7}, \ldots, \frac{4997}{2001}, \ldots \frac{4.999.997}{2.000.001}, \ldots, \frac{499.999.997}{2.000.000.001}, \ldots, \frac{5n-3}{2n+1}\right\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

0,66 1,4 1,71 2,49 2,4999 2,4999999

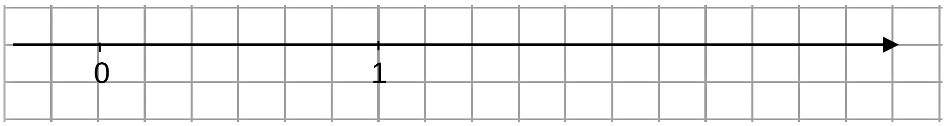
Ínfimo:			Supremo:					

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Consideremos la sucesión:

$$\{an\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots \frac{1}{100.000}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$$

Dibujemos los distintos términos de la sucesión en la recta real:



Observamos que los términos de la sucesión tienden hacia el número real 0 a medida que n toma valores infinitamente grandes.

Ese número real 0 es considerado como el límite de esa sucesión y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

DEFINICIÓN: se dice que una sucesión $\{an\}$ tiende a un límite L y se escribe

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = L$ (Se lee: límite cuando n tiende a infinito de an es L) si la diferencia de an y L en valor absoluto es tan pequeña como se desee cuando n es muy grande.

CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA:

Una sucesión es convergente si la sucesión tiende a un límite, en caso contrario es divergente, ejemplos:

- La sucesión $\{an\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots \frac{1}{100.000}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$ es convergente porque $\lim_{n\to\infty} an = \boxed{\quad}\boxed{\quad}$
- La sucesión $\{an\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$ es divergente porque $\lim_{n\to\infty} an = \boxed{\quad}\boxed{\quad}$
- La sucesión $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ es divergente porque $\lim_{n\to\infty} an = \boxed{\quad}\boxed{\quad}\boxed{\quad}\boxed{\quad}\boxed{\quad}$

Teorema 1: (Unicidad)

El límite de una sucesión, si existe es único

Teorema 2:

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

Ejemplo: $\{5\} = \{5, 5, 5, \ldots, 5\ 5, 5, \ldots\}$

$$\lim_{n\to\infty} 5 = \boxed{\quad}\boxed{\quad}$$

Sean $an \to m$ y $bn \to k,\ m, k \in R$

a. $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = m \pm k$

b. $\lim_{n\to\infty} a_n x b_n = \lim_{n\to\infty} a_n x \lim_{n\to\infty} b_n = m.k$

c. $\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n = m/k\,;\; b_n \neq 0$

d. $\lim_{n\to\infty} C.a_n = C.\lim_{n\to\infty} a_n$

e. $\lim_{n\to\infty} [a_n]^c = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^c$

f. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[c]{a_n} = \sqrt[c]{\lim_{n\to\infty} a_n}$

g. $\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right);\; a_n > 0$

Teorema 4:

Si $a_n \to \pm\infty$ entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{a_n} = 0;\;\; c \in R$$

Ejemplo: Calcular los siguientes límites:

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{7}{5n+3} =$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{4n^2+3n-7} =$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n-8}{3n^2+2n-7} =$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-3}{2n+1} =$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2-3n+1}{4n^5+2n-6} =$

f. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4-7}{2n^2+1} =$

g. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{4n^2-5}{7-9n^2}} =$

h. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n^3-5}{4n^3+2}\right)^3 =$

Teorema 5:

$$\lim_{n\to\infty} k^n = \begin{cases} \infty \; Si \; k > 1 \\ 1 \; Si \; k = 1 \\ 0 \; Si -1 < k < 1 \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular los siguientes límites:

a. $\lim_{n\to\infty} 8^n =$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{6^n} =$

c. $\lim_{n\to\infty} (-3)^{2n} =$

d. $\lim_{n\to\infty} (-4)^n =$

e. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 2^{2n}}{4^n - 2^n} =$

f. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+2} + 2^{2n+1}}{4^{n+3} - 3^{n-2}} =$

Teorema 6:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen\ n}{n} = 0$$

Ejemplo: Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen\ (5n+7)}{10n+14} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen\ (3n^2+5)}{6n^3+10n} =$$

Teorema 7:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (e = 2{,}718281\ \ldots)$$

$$\Longrightarrow [f(x)]^{g(x)} = e^{\lambda}$$

donde $\lambda = \lim_{n\to\infty} (f(x)-1)^n . g(x)$

Ejemplo: Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+3}{5n^2-7}\right)^n =$$

Ejercicios Unidad 6

1. Determine la cantidad indicada de la sucesión aritmética
a. $a_1 = 4$, $d = 3$; determine a_4
b. $a_1 = -9$, $d = -2$; determine a_{10}
c. $a_1 = -2$, $d = 5/3$; determine a_{13}
d. $a_1 = 5$, $a_9 = 21$; determine d
e. $a_1 = 8$, $a_n = 29$, $d=3$; determine n

2. Determine el número de términos de cada sucesión y determine s_n
a. 1,4,7,10,…,43
b. -9,-5,-1,3,…,27
c. 1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2,…,17/2
d. 9,12,15,18,…,93
e. -8,-6,-4,-2,…,42

3. a. Determine la suma de los primeros 50 números naturales
b. Determine la suma de los primeros 50 primeros números naturales pares
c. Determine la suma de los primeros 50 primeros números naturales impares
d. Determine la suma de los primeros 30 múltiplos positivos de 5

4. Francisco deja caer una pelota desde la ventana de un segundo piso. Cada vez que la pelota rebota, alcanza una altura de 6 pulgadas menor que en el rebote previo. Si en el primer rebote la pelota alcanza una altura de 6 pies, determine la altura que alcanza la pelota en el rebote 11.

5. Inicialmente, Fernanda gana un salario de \$20.000 anual, pero le dicen que recibirá un aumento de \$1.000 al final de cada año de trabajo.
a. Determine el salario que obtendrá Fernanda durante el año 12
b. ¿Cuánto recibirá en total durante sus primeros 12 años de trabajo?

6. Determine el término que se pide en cada sucesión geométrica
a. $a_1 = 4$, $r=2$; determine a_6
b. $a_1 = 9$, $r = 1/3$; determine a_7
c. $a_1 = -3$, $r = -2$; determine a_{12}
d. $a_1 = 5$, $r = 2/3$; determine a_9
e. $a_1 = 4$, $r = -2$; determine a_6

7. Encontrar el término n-ésimo de las siguientes sucesiones:
a. 4, 7, 10, 13,…
b. 2, 4, 6, 8,…
c. 1, -3, 9, -27,…
d. 5, 10, 20,…
e. $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2},\dots$

II. Límites de sucesiones: Calcular los siguientes límites:

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n+4}{n^2+4}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^{1/n}}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n-1}}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}-4^{2n+5}}{2^{4n+2}+7^{n+2}}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{9n^6-3n+8}{2n^4+5n+6}\right)^{\frac{2n+3}{n+1}}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n^3+6n+1}{6n^3+5n+1}\right)^{\frac{4n^2+3n+1}{n+1}}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{3+2n^2}\right)^n$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-4}{\sqrt{n^4+1}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+3}{n^3-8n+5}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^3+n+1}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-n^2}{(2n+1)^3}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^n$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n+7}{2n^2+3n+23}\right)^{3n^2+4n+2}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n+5}{n^2+6n+12}\right)^{5n+3}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3n^2+4n+5}{n^3+5n^2+7n+31}\right)^{bn}$

UNIDAD 7: LÍMITES DE FUNCIONES REALES:

Sea $f(x) = 3x + 2$ una función real. Examinemos su compartamiento cuando $x \to 4$

Solución: Por la izquierda de 4

Por la derecha de 4

Como la función tienda a 14 para valores de x próximos a 4 por su izquierda y por su derecha, se considera a 14 como el límite de esa función cuando $x \to 4$ y se escribe

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 5} \frac{8x + 3}{2x - 1} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 7} =$$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x + 7} =$$

Definición del límite de una función en un punto:

Sea f(x) una función real

Cálculo del límite:
Para calcular el límite de una función en un punto hay necesidad de aplicar ciertos teoremas

Teorema 1:

$$\lim_{x \to a} f(x) = m \quad \Rightarrow \; m\; es\; único$$

Si existe el límite de una función en un punto, este es único

Teorema 2:

$Si\ f(x) = C$

$\lim_{x \to a} C = C$

Ejemplo:

$\lim_{x \to 2} \frac{7}{3} =$

$\lim_{x \to 5} -4 =$

Teorema 3:

$Sea\ f(x) = x \quad \longrightarrow$

$\lim_{x \to a} x = a$

Ejemplo:

$\lim_{x \to 3} x =$

$\lim_{x \to -2} x =$

Teorema 4:

$si\ el\ \lim_{x \to a} f(x) = m \ \wedge \ \lim_{x \to a} g(x) = k\ ;\ m, k \in R$

$\Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = m \pm k$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{m}{k}\ ;\ k \neq 0$$

Aplicación:

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x^2 - 3}{2x + 1} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x + 1}{5x + 6} =$$

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{2x^2 - 3}{4x - 1} \right)^5 =$$

LIMITES INDETRMINADOS:

Hallar los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} =$

2. $\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{2x^2 - 9x - 35} =$

3. $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25} =$

4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{4x+5} - 3} =$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}-2} =$

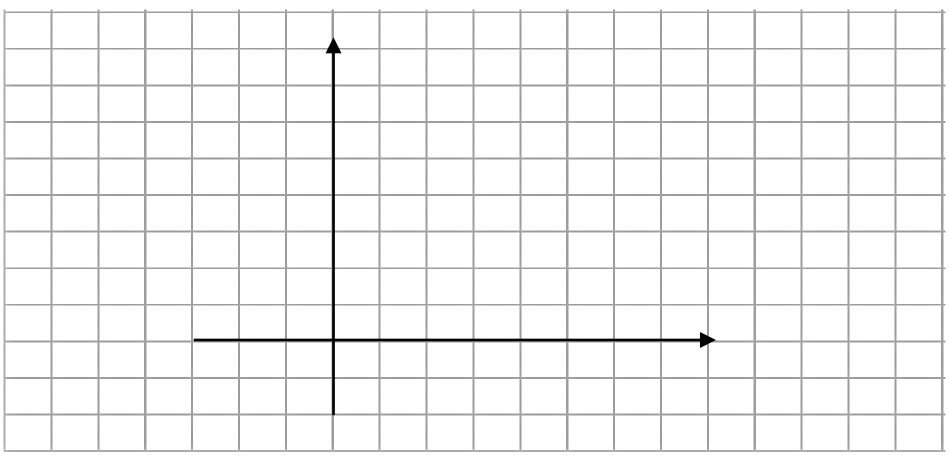
LÍMITES LATERALES

Para la siguiente función examinemos su comportamiento cuando $x \to 2$

$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ \ x \geq 2 \\ x & si \ \ x < 2 \end{cases}$

$f(x) = x \quad \to$

$f(x) = x^2 \quad \to$



Contradice la unicidad del límite, por lo tanto.

En la función:

$\lim_{x \to 1} f(x) =$

$\lim_{x \to 5} f(x) =$

Cuando la función salta como en el anterior ejemplo es necesario introducir el concepto de límites laterales:

$x \to a^{+}$ significa que

$x \to a^{-}$ significa que

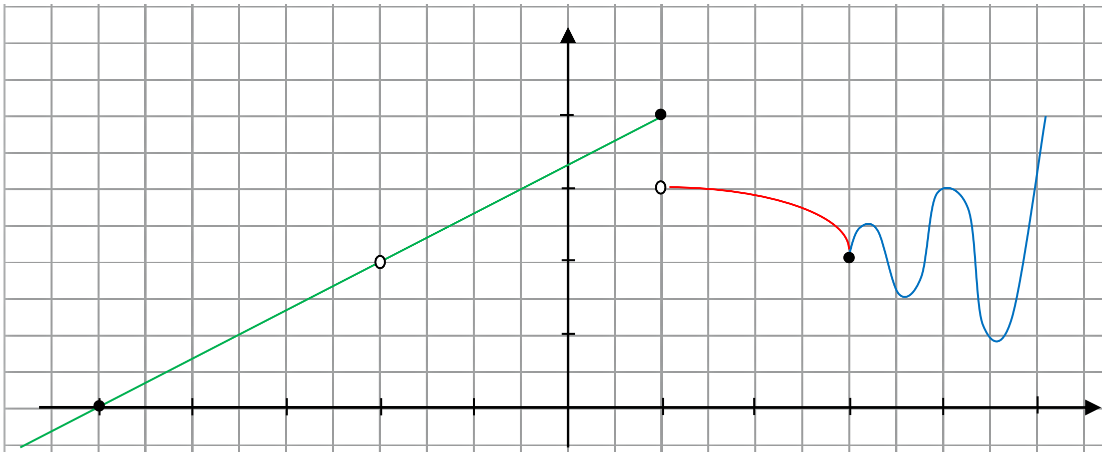
Por lo tanto en la anterior función podemos decir:

En la función:

$\lim_{x \to 2^{+}} f(x) =$

$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) =$

El siguiente gráfico permitirá una mejor comprensión:



$\lim_{x \to -2^{+}} f(x) =$

$\lim_{x \to -2^{-}} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) =$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) =$

CONTINUIDAD

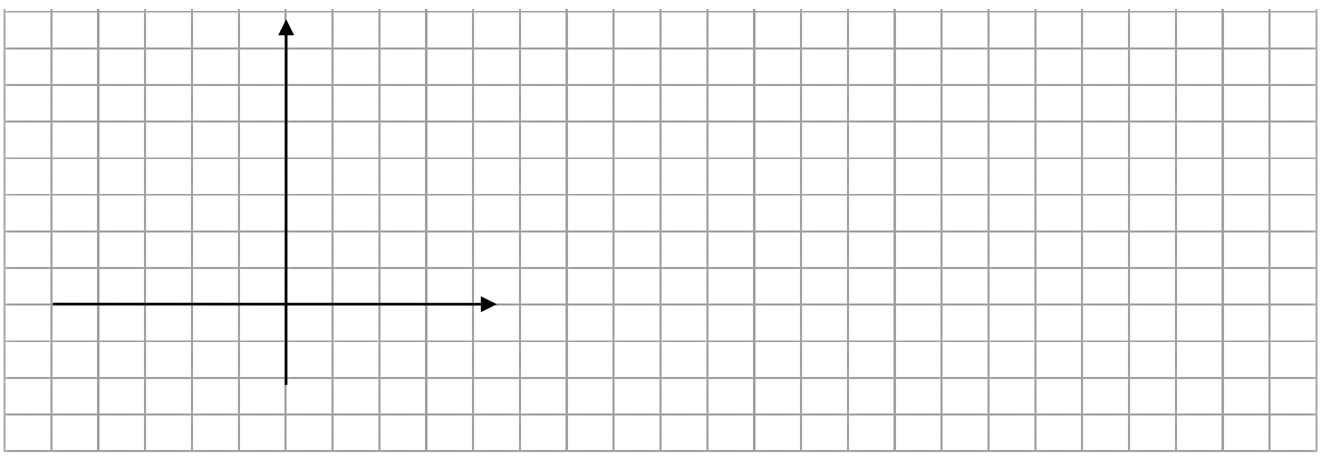
Graficar: $f(x) = \begin{cases} 2x \;\; si \;\; x > 2 \\ 3 \;\; si \;\; x = 2 \\ x - 1 \;\; si \; x < 2 \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} 2x \;\; si \;\; x > 2 \\ 6 \;\; si \;\; x = 2 \\ x^2 \;\; si \; x < 2 \end{cases}$

$g(x) = \frac{1}{x-2}$

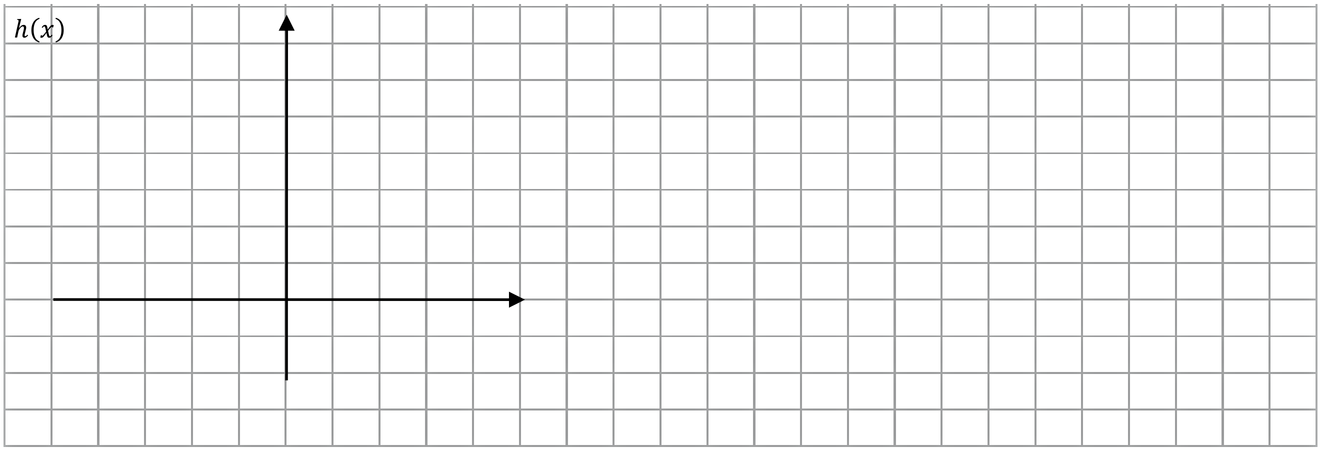
$j(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

$t(x) = \begin{cases} x + 3 \;\; si \;\; x > 2 \\ 5 \;\; si \;\; x = 2 \\ x^2 + 1 \;\; si \; x < 2 \end{cases}$



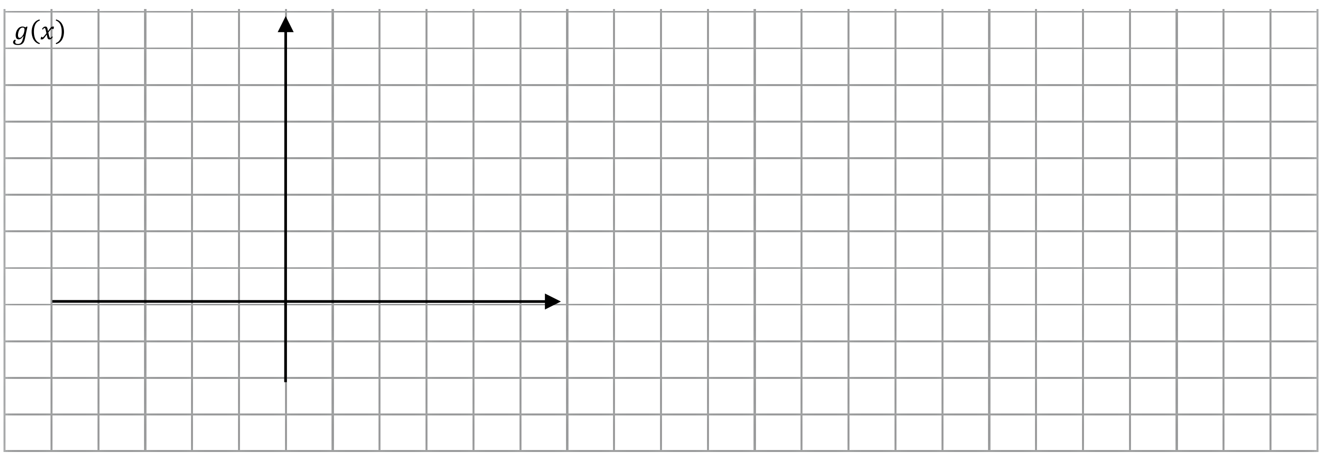
$\lim_{x \to -2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$



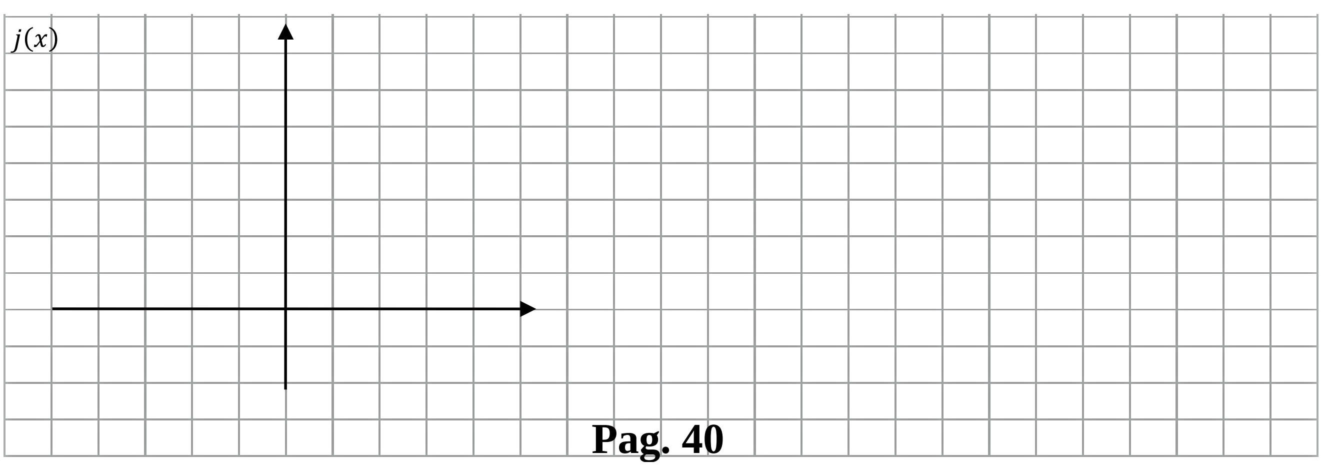
$\lim_{x \to -2^+} h(x) =$

$\lim_{x \to -2^-} h(x) =$



$\lim_{x \to -2^+} g(x) =$

$\lim_{x \to -2^-} g(x) =$



$\lim_{x \to -2^+} t(x) =$

$\lim_{x \to -2^-} t(x) =$

Concepto de continuidad: Como podemos ver, de las anteriores, la gráfica que no da saltos es

Si la gráfica de una función puede ser trazada sin levantar el lápiz del papel la función se denomina función continua.

Analíticamente para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = a$ debe cumplir 3 condiciones:

1. Que exista f(a)
2. Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$
3. Que se verifique $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Cuando alguna de estas condiciones no se cumpla afirmaremos que la función presenta en $x = a$ una discontinuidad.

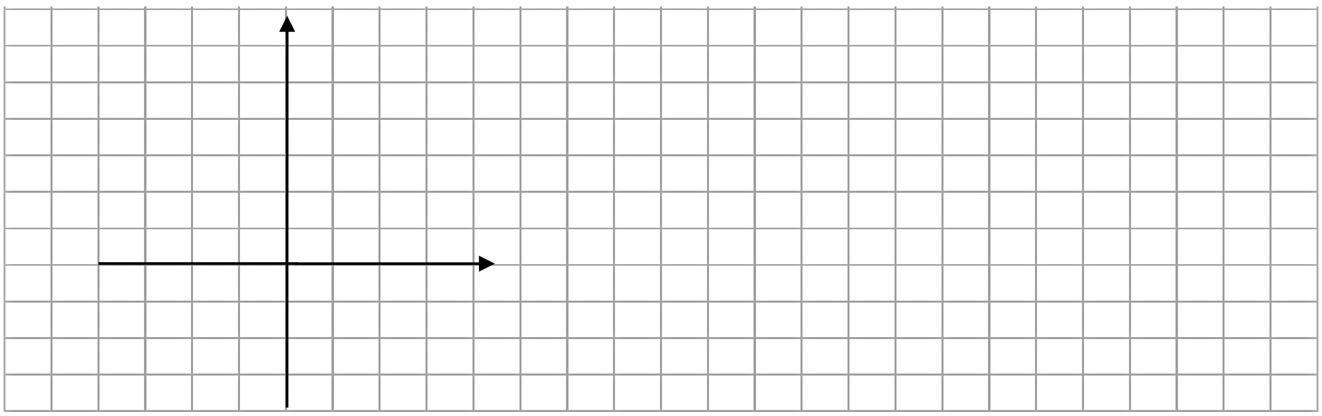
Ejemplo: Analicemos la continuidad de $t(x)$ en $x = 2$

$$t(x) = \begin{cases} x + 3 \;\; si \;\; x > 2 \\ 5 \;\; si \;\; x = 2 \\ x^2 + 1 \;\; si \; x < 2 \end{cases}$$

Ejercicio:

1. Graficar y analizar la continuidad de la siguiente función:

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \leq 1 \\ -x+2 & si \quad x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$



2. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y = \frac{5}{(x+3)^2}$

Una función f discontinua en $x = a$ presenta una discontinuidad removible o evitable en dicho punto si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es finito, entonces la función:

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

1. Hallar los puntos de discontinuidad
2. Mirar que la discontinuidad es removible o no
3. Si es removible, redefinir la función para que sea continua. Graficar

UNIDAD 9 GEOMETRÍA

HISTORIA DE LA GEOMETRÍA:

Geometría (del griego *geō,* 'tierra'; *metrein,* 'medir'), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal, y geometría no euclídea.

El origen del término geometría es una descripción precisa del trabajo de los primeros geómetras, que se interesaban en problemas como la medida del tamaño de los campos o el trazado de ángulos rectos para las esquinas de los edificios. Este tipo de geometría empírica, que floreció en el Antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia, fue refinado y sistematizado por los griegos como el matemático Pitágoras En el siglo VI a.C.

La geometría demostrativa de los griegos, que se ocupaba de polígonos y círculos y de sus correspondientes figuras tridimensionales, fue mostrada rigurosamente por el matemático griego Euclides, en su libro *Los elementos.* El texto de Euclides, a pesar de sus imperfecciones, ha servido como libro de texto básico de geometría hasta casi nuestros días.

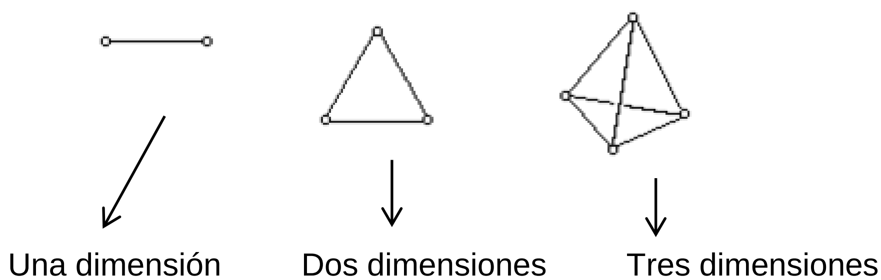
Los griegos introdujeron los problemas de construcción, en los que cierta línea o figura debe ser construida utilizando sólo una regla de borde recto y un compás. Ejemplos sencillos son la construcción de una línea recta dos veces más larga que una recta dada, o de una recta que divide un ángulo dado en dos ángulos iguales. Tres famosos problemas de construcción que datan de la época griega se resistieron al esfuerzo de muchas generaciones de matemáticos que intentaron resolverlos: la duplicación del cubo (construir un cubo de volumen doble al de un determinado cubo), la cuadratura del círculo (construir un cuadrado con área igual a un círculo determinado) y la trisección del ángulo (dividir un ángulo dado en tres partes iguales). Ninguna de estas construcciones es posible con la regla y el compás, y la imposibilidad de la cuadratura del círculo no fue finalmente demostrada hasta 1882.

Los griegos, y en particular Apolonio de Perga, estudiaron la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrieron muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de las ciencias físicas; por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son fundamentalmente cónicas.

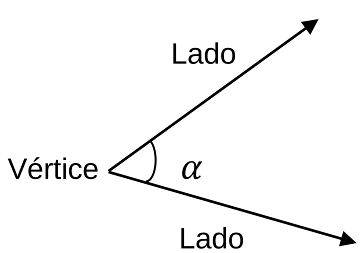
Arquímedes, uno de los grandes científicos griegos, hizo un considerable número de aportaciones a la geometría. Inventó formas de medir el área de ciertas figuras curvas así como la superficie y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas, como paraboloides y cilindros. También elaboró un método para calcular una aproximación del valor de pi (p), la proporción entre el diámetro y la circunferencia de un círculo y estableció que este número estaba entre 3 10/70 y 3 10/71.

La geometría sufrió un cambio radical de dirección en el siglo XIX. Los matemáticos Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski, y János Bolyai, trabajando por separado, desarrollaron sistemas coherentes de geometría no euclídea. Estos sistemas aparecieron a partir de los trabajos sobre el llamado 'postulado paralelo' de Euclides, al proponer alternativas que generan modelos extraños y no intuitivos de espacio, aunque, eso sí, coherentes. Las geometrías no euclídeas fueron estudiadas en su forma más general por Riemann, con su descubrimiento de las múltiples paralelas. En el siglo XX, a partir de los trabajos de Einstein, se le han encontrado también aplicaciones en física.

Casi al mismo tiempo, el matemático británico Arthur Cayley desarrolló la geometría para espacios con más de tres dimensiones. Imaginemos que una línea es un espacio unidimensional. Si cada uno de los puntos de la línea se sustituye por una línea perpendicular a ella, se crea un plano, o espacio bidimensional. De la misma manera, si cada punto del plano se sustituye por una línea perpendicular a él, se genera un espacio tridimensional. Yendo más lejos, si cada punto del espacio tridimensional se sustituye por una línea perpendicular, tendremos un espacio tetradimensional. Aunque éste es físicamente imposible, e inimaginable, es conceptualmente sólido. Los trabajos de Cayley en geometría cuatridimensional, proporcionaron a los físicos del siglo XX, especialmente a Albert Einstein, la estructura para desarrollar la teoría de la relatividad.



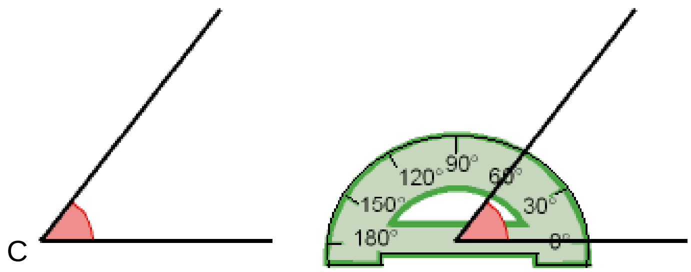
ANGULOS:



Un ángulo es la unión de dos semirrectas con un punto común. Las semirrectas son los **lados** del ángulo y el punto común es el **vértice.**

Para nombrar un ángulo, se marca sobre cada lado, un punto y se leen los puntos, de tal manera, que letra que indica el vértice, quede en el centro: ∢ABC. También se puede nombrar la letra que indica el vértice ∢B o una letra del alfabeto griego: α(alfa), β(beta), θ(teta), ω(omega).

Para medir un ángulo se utiliza el **transportador**. Por ejemplo, el ∢C de la siguiente figura mide 60°.

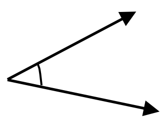


<u>Clasificación de ángulos:</u>

Los ángulos se pueden clasificar según su **medida**, según su **suma** y según su **posición.**

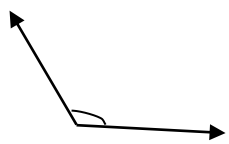
Según su medida: Los ángulos pueden ser:

Agudos



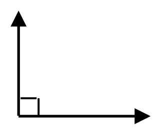
mide menos
De 90°

Obtusos



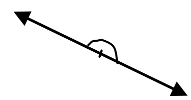
mide más de 90°
y menos de 180°

Rectos



mide 90°

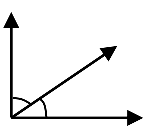
Llanos



mide 180°

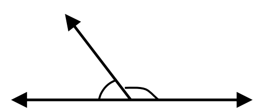
Según su suma: los ángulos se clasifican en:

Complementarios



La suma de sus medidas
es 90°

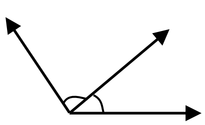
Suplementarios



La suma de sus medidas
es 180°

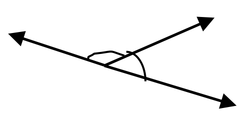
Según su posición: los ángulos pueden ser:

Consecutivos



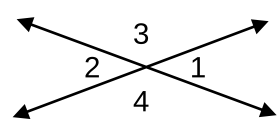
Tienen el mismo
vértice y un lado
común

Adyacentes



dos ángulos consecutivos
cuyos lados no comunes
están en la mima recta

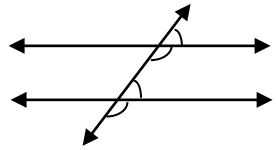
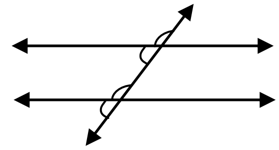
Opuestos por el vértice



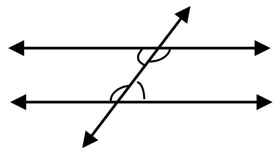
∢1 y ∢2 son opuestos por
el vértice, también lo son
∢3 y ∢4

Ángulos determinados por dos paralelas y una secante

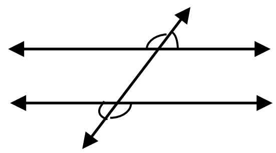
Ángulos colaterales: Están ubicados al mismo lado de la secante

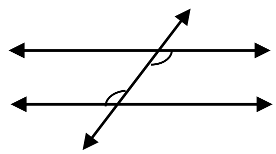
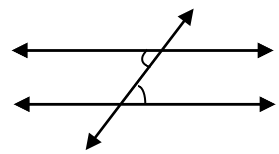
Ángulos internos: Son los que están Entre las rectas paralelas



Ángulos externos: ubicados fuera de las rectas paralelas

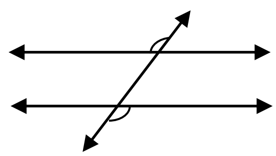
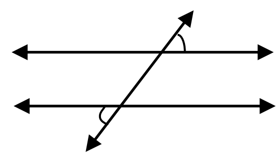


Ángulos alternos internos: son internos, No colaterales ni adyacentes

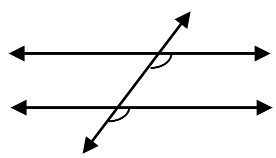
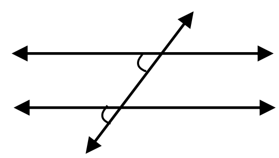
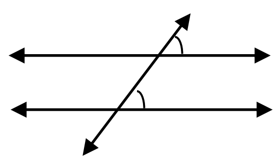
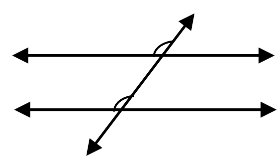
Los ángulos alternos internos son congruentes

Ángulos alternos externos: son externos, no colaterales ni adyacentes

Los ángulos alternos externos son congruentes

Ángulos correspondientes: uno es interno y el otro externo, son colaterales pero no adyacentes.

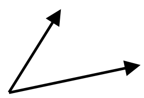
Los ángulos correspondientes son congruentes

Ejercicio 1:

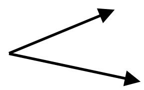
1. Construir con el transportador cada ángulo:
a. 45° b. 125° c. 150°

2. Construir el complemento de cada ángulo:

a.

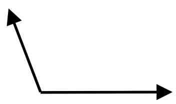


b.

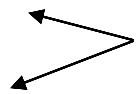


3. Construir el suplemento de cada ángulo

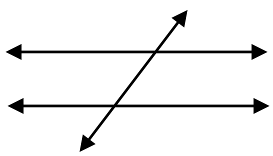
a.



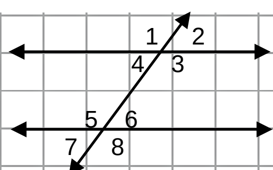
b.



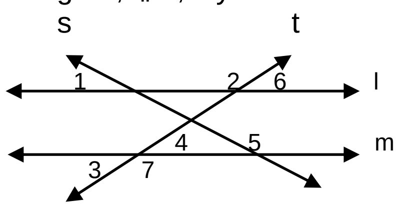
4. señalar, en el siguiente gráfico, una pareja de ángulos que sean alternos internos



5. Si en el gráfico ∢2 = 40° Hallar la medida de los demás ángulos

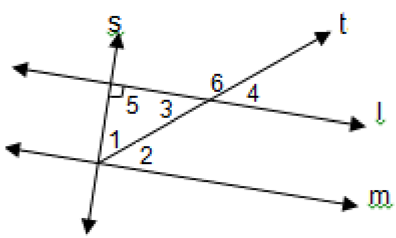


6. En la figura, l∥m, s y t son secantes, $\sphericalangle 1$ = 35° y $\sphericalangle 2$ = 130°



Escribir verdadero(V) o falso(F) según corresponda:
a. $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 3$
b. $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 4$ son suplementarios
c. $\sphericalangle 5$ y $\sphericalangle 6$ son colaterales
d. $\sphericalangle 5$ mide 145°
e. $\sphericalangle 7$ mide 130°

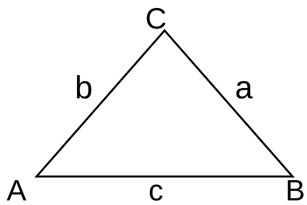
7. En la figura l∥m, l⊥s, t una secante y $\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$



Hallar la medida de los siguientes ángulos
a. $\sphericalangle 4$ b. $\sphericalangle 3$ c. $\sphericalangle 6 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 4$

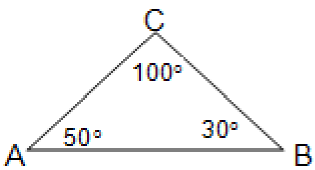
TRIÁNGULOS: Un triángulo es un polígono de tres lados, tres ángulos y tres vértices.

En todo triángulo ABC, los lados se nombran, con la misma letra del vértice opuesto, escritos con minúscula.



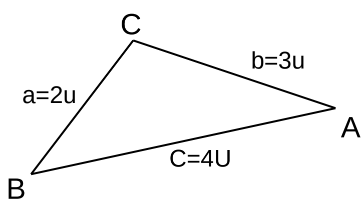
Propiedades de los triángulos:

1. La suma de los ángulos interiores es de 180°



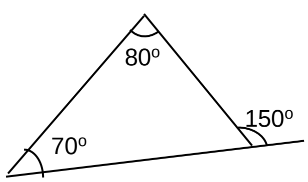
$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$
$$50° + 30° + 100° = 180°$$

2. La medida de uno de sus lados es menor que la suma de las medidas de los otros dos



$$3 < 2 + 4$$
$$4 < 2 + 3$$
$$2 < 3 + 4$$

3. En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él



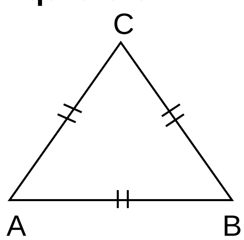
150º = 80º +70º

Clasificación de triángulos:

Los triángulos se clasifican según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos

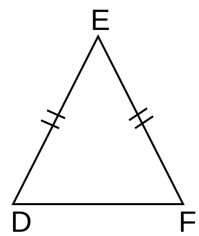
Según la medida de sus lados

Equilátero



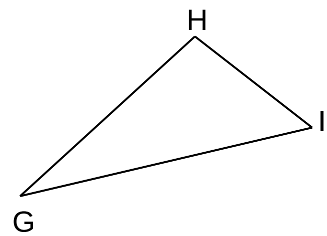
Todos sus lados tienen
La misma medida
60° 60° 60°

Isósceles



Sólo dos de sus lados
tienen la mima medida

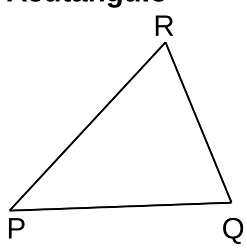
Escaleno



Todos sus lados tienen
diferente medida

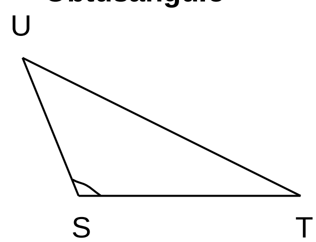
Según la medida de sus ángulos

Acutángulo



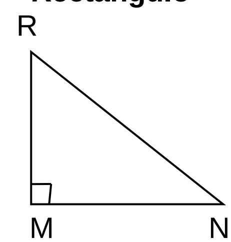
Todos sus ángulos son
Agudos

Obtusángulo



Tiene un ángulo
obtuso (>90°)

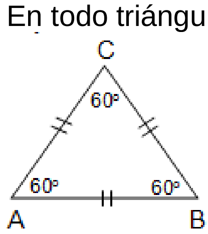
Rectángulo



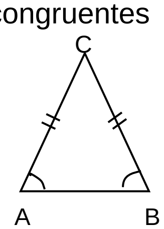
Tiene un ángulo
recto (=90°)

Observaciones:

- En todo triángulo equilátero sus ángulos internos miden 60° cada uno

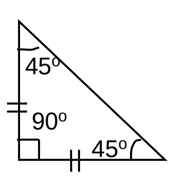


- En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes



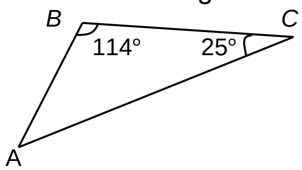
$$\measuredangle A \cong \measuredangle B$$

- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles miden cada uno 45º.

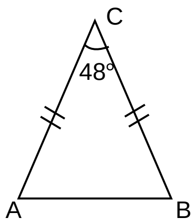


Ejercicio 2:

1. Calcular el ángulo $\sphericalangle A$ del siguiente triángulo ABC

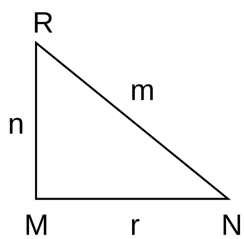


2. Determinar la medida de los ángulos $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle B$ del siguiente tringulo isósceles ABC



TRIÁNGULO RECTÁNGULO:

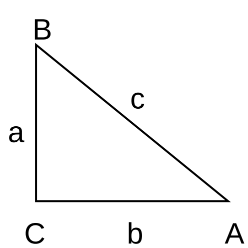
Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa.**



r y n son catetos
m es la hipotenusa

Teorema de Pitágoras:

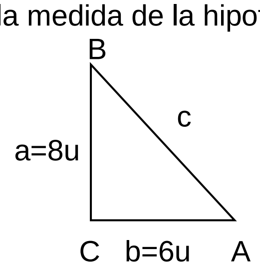
El teorema d Pitágoras dice que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado d la hipotenusa es igual a la suma de os cuadrados de los catetos.



$c^2 = a^2 + b^2$ → *Teorema de Pitágoras*

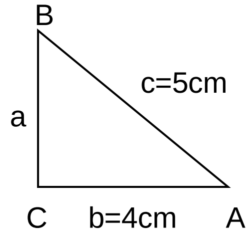
Ejercicio 3:

1. Si a=6u y b=8u son los catetos del triángulo rectángulo que se muestra en la figura, hallar la medida de la hipotenusa

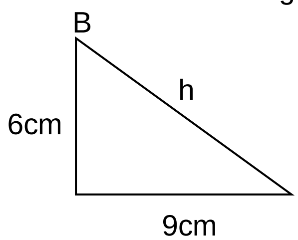


110

2. En el siguiente triángulo rectángulo encontrar la medida del lado a

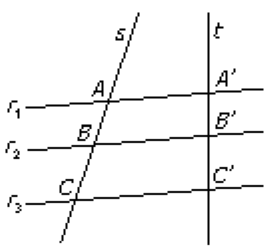


3. Aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el valor de la hipotenusa



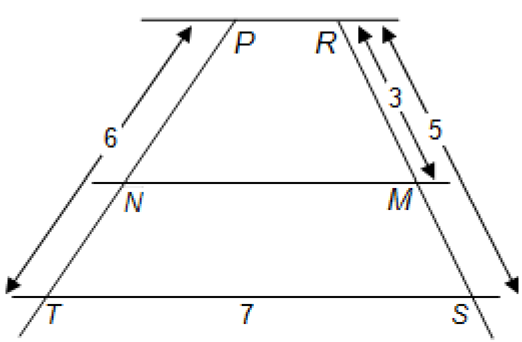
TEOREMA DE THALES:

Según este teorema, una familia de rectas paralelas, r_1, r_2, r_3,…, que cortan a dos rectas congruentes, *s* y *t*, determinan en ella segmentos proporcionales.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Problema: observa la siguiente figura. *RS* = 5 cm, *PT* = 6 cm y *ST* = 7 cm. El punto *M* está en el lado *RS* y *RM* = 3 cm. La recta paralela a *ST,* que pasa por *M,* corta al lado *PT* en el punto *N*. de igual forma *PR* es paralela a *ST*. Calcular la longitud de *NP*.



CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS:

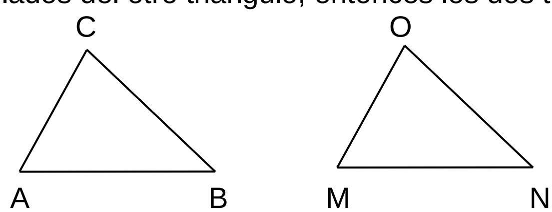
Definición: Dos figuras son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. Se puede identificar que dos figuras son congruentes cuando al superponerlas todos sus elementos coinciden.

Ejemplo:

Los dos triángulos anteriores son congruentes.

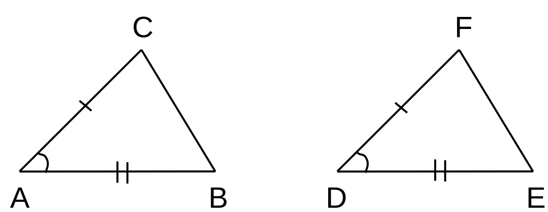
Criterios de congruencia de un triángulo: Para determinar que dos triángulos son congruentes, se requiere la congruencia sólo tres de sus elementos:

1. Lado, lado, lado (LLL): Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los otros tres lados del otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes



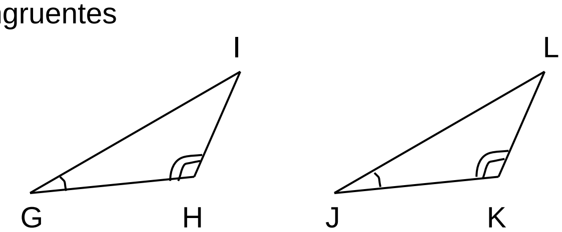
$\overline{AB} \cong \overline{MN},\ \overline{BC} \cong \overline{NO},\ \overline{CA} \cong \overline{OM}$
Luego, ΔABC ≅ ΔMNO

2. Lado, ángulo, lado (LAL): Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes con los de otro triángulo, los triángulos son congruentes



$\overline{AB} \cong \overline{DE},\ \overline{AC} \cong \overline{DF}\ \ y\ \ \measuredangle A \cong \measuredangle D$
Luego, ΔABC ≅ ΔDEF

3. Ángulo, lado, ángulo (ALA): Si dos ángulos de un triángulo y el lado comprendido entre ellos son respectivamente congruentes a as de otro triángulo, los triángulos son congruentes

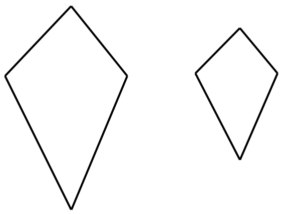


$\measuredangle G \cong \measuredangle J,\ \measuredangle H \cong \measuredangle K\ \ \overline{GH} \cong \overline{JK}$
Luego, ΔGHI ≅ ΔJKL

Semejanza de Triángulos:

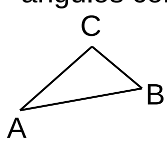
Definición: dos figuras son semejantes si tienen la misma forma pero diferente tamaño

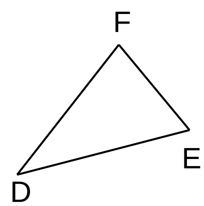
Ejemplo:



Lo primero que debemos hacer para saber si dos triángulos son semejantes es comprobar si:

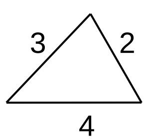
- Los tres ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes a los tres ángulos correspondientes del otro triángulo

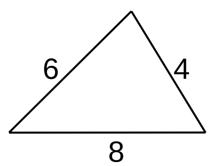




$\sphericalangle A \cong \sphericalangle D,\ \sphericalangle B \cong \sphericalangle E,\ \sphericalangle C \cong \sphericalangle F$
Luego, ΔGHI ~ ΔJKL

- Los tres lados de un triangulo son proporcionales a los correspondientes lados del otro triángulo

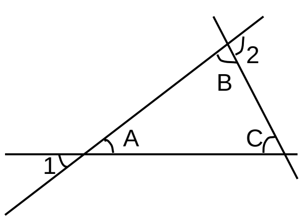




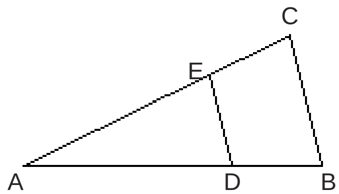
$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

en este caso la razón de semejanza es 1/2

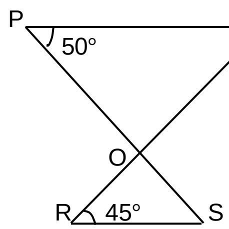
Ejercicio 4:
1. En el triángulo ABC, $\sphericalangle 1 = 45°$ y $\sphericalangle 2 = 128°$. Hallar la medida de los tres ángulos interiores del triángulo ABC



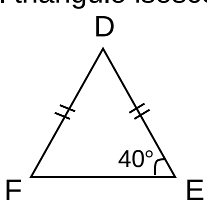
2. En la figura, el segmento *DE* es paralelo al segmento *BC*, la longitud del segmento *AC es* 4cm, la longitud de *AE* es 3cm y la longitud de *BC* es 2cm. Encontrar la longitud de *ED*



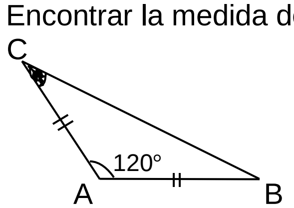
3. En la figura, PQ∥RS. Encontrar la medida de los ángulos interiores de los triángulos POQ Y ORS



4. En el triángulo isósceles encontrar el ∢D



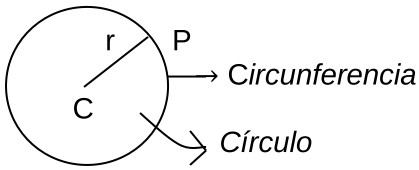
5. Encontrar la medida del ángulo coloreado en el siguiente triángulo:



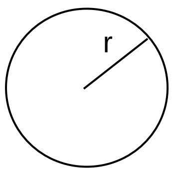
CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA:

La **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos que están a la misma distancia de otro punto llamado **centro.**
El segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella se llama **radio.**

El **círculo** es el conjunto de todos los puntos interiores de una circunferencia.

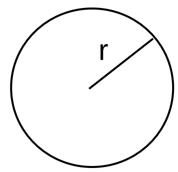


Longitud de la circunferencia:



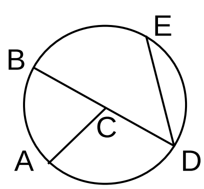
$C = 2\pi r$

Área del círculo:



A= πr^2

Líneas en la circunferencia:



Cuerda: Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia: *ED.*

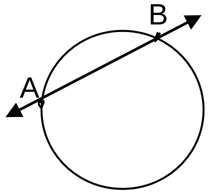
Diámetro: Es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, la longitud del diámetro es el doble del radio: $BD = 2r$.

Arco: Es la porción de circunferencia comprendida entre dos puntos de esta: $\widehat{AD}$ (arco AB).

Semicircunferencia: Es el arco determinado por los extremos de un diámetro

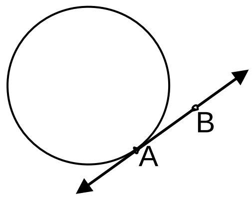
Posiciones relativas de una recta y una circunferencia:

- Si la recta y la circunferencia tienen dos puntos comunes, la recta es secante a la circunferencia



$\overleftrightarrow{AB}$ es la recta secante a la circunferencia

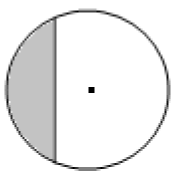
- Si la recta y la circunferencia sólo tienen un punto común, la recta es tangente a la circunferencia

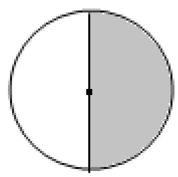


AB es tangente a la circunferencia. El punto A se denomina **punto de tangencia.**

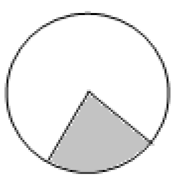
Elementos del círculo: Los elementos del círculo son:

1. Segmento circular: Es la región del plano limitada por una cuerda y su arco. Si la cuerda es un diámetro, cada región se llama semicírculo

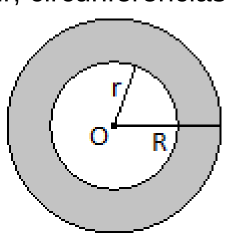

Segmento circular


Semicírculo

2. Sector circular: Es la región del círculo limitado por dos radios y el arco de circunferencia comprendido entre ellos.



3. Corona circular: Es la región del plano limitada por dos circunferencias concéntricas, es decir, circunferencias con el mismo centro.



$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$
$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Ejercicio 5:
1. Hallar la longitud de una circunferencia de 2 cm de radio

2. La longitud de una circunferencia 18,84 cm. Hallar la medida del diámetro

3. Hallar el área de un círculo de 10 cm de diámetro

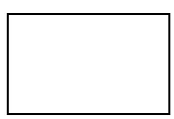
4. Hallar el área de la corona circular formada por círculos de 3 cm y 5 cm de radio.

CUADRILÁTEROS

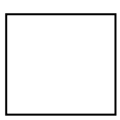
Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Los cuadriláteros se clasifican en: paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Paralelogramos: Son cuadriláteros que tienen sus lados opuestos paralelos. Existen cuatro tipos de paralelogramos: rectángulo, cuadrado, rombo, romboide o paralelogramo general.

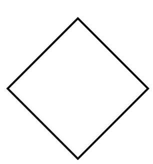
Rectángulo: Paralelogramo con cuatro ángulos rectos



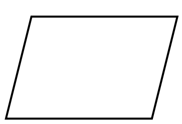
Cuadrado: es un rectángulo con cuatro lados congruentes y cuatro lados congruentes



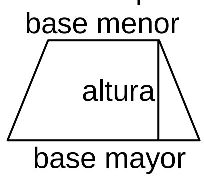
Rombo: Es un paralelogramo con cuatro lados congruentes, cuyas diagonales son perpendiculares



Romboide o paralelogramo general: Es un paralelogramo de ángulos y lados opuestos congruentes



Trapecios: El trapecio es un cuadrilátero que tiene sólo un par de lados paralelos

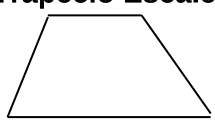


En un trapecio los lados paralelos se llaman bases. La de mayor longitud es la base mayor (B) y la de menor longitud es la base menor (b).

La altura del trapecio es la perpendicular trazada desde un punto de la base menor sobre la base mayor.

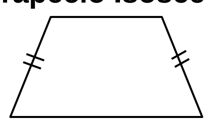
Los trapecios se clasifican en:

Trapecio Escaleno



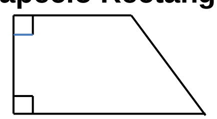
Tiene los cuatro lados de ≠ medida

Trapecio Isósceles



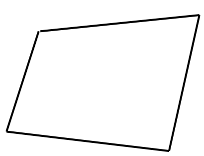
Tiene los lados no paralelos de = longitud

Trapecio Rectángulo



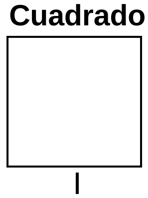
Tiene 2 ángulos rectos

Trapezoides: Los trapezoides son cuadriláteros que no tienen lados paralelos.



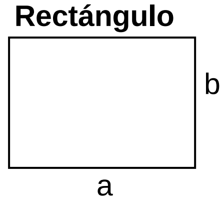
AREA DE FIGURAS PLANAS

Cuadrado



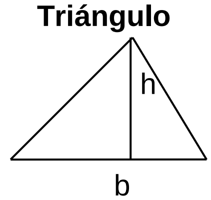
$A = l^2$

Rectángulo



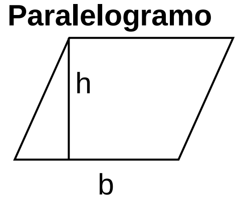
$A = ab$

Triángulo



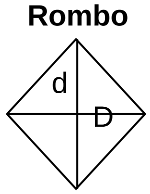
$A = \frac{bh}{2}$

Paralelogramo



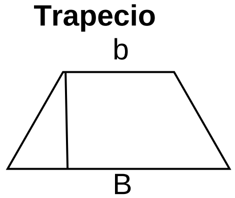
$A = bh$

Rombo



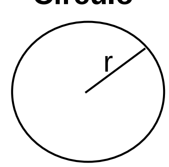
$A = \frac{Dd}{2}$

Trapecio



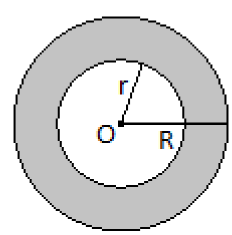
$A = \frac{(B + b)h}{2}$

Círculo



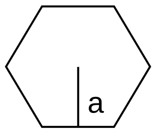
$A = \pi r^2$

Corona circular



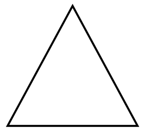
$A = \pi(R^2 - r^2)$

Polígono Regular



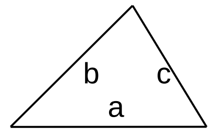
$A = \frac{pa}{2}$

Triángulo equilátero



$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$

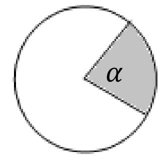
Triángulo



$p = \frac{a+b+c}{2}$

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Sector circular

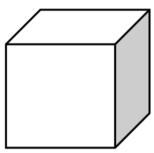


$A = \pi r^2 \alpha / 360$

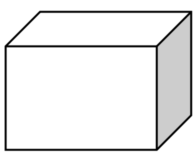
NOTA: $\pi = 3{,}14$

VOLUMEN Y ÁREA DE CUERPOS GEOMÉTRICOS:

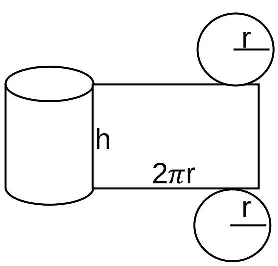
Hexaedro o Cubo: Poliedro regular de 6 caras que son cuadrados



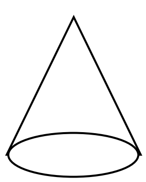
Paralelepípedo u ortoedro: Es la figura prismática cuyas bases son dos rectángulos

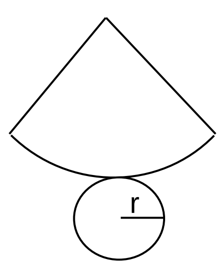


Cilindro: Es el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica(figura generada por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados)

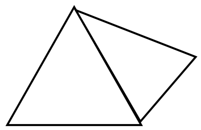


Cono: El cono está formado por un sector circular y un círculo, que es la base





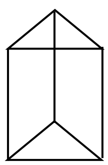
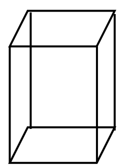
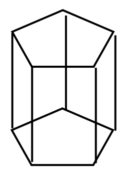
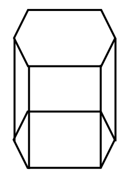
Pirámide: poliedro limitado por una base, que es un polígono cualquiera, y varias caras laterales, que son triángulos con un vértice común llamado vértice de la pirámide.



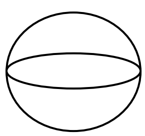
Prisma regular: Los prismas regulares son figuras gemétricas limitadas por dos polígonos regulares llamados bases, y las caras laterales son rectángulosque tienen por base los lados de dichos polígonos.

Los prismas regulares se clasifican por el número de lados de los polígonos básicos en:

Triangulares Cuadrangulares pentagonales Hexagonales

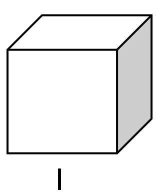





Esfera: Es el cuerpo redondo que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro. El centro y el radio de la esfera son los del semicírculo que genera.



FÓRMULAS PARA EL VOLUMEN Y ÁREA DE CUERPOS GEOMÉTRICOS:

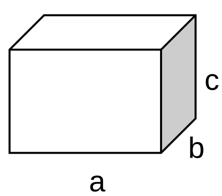
Cubo



$A = 6l^2$

$V = l^3$

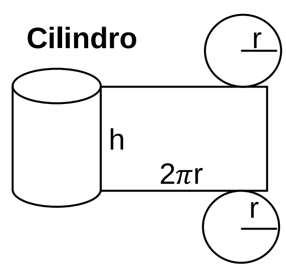
Paralelepípedo



$A = 2(ab + ac + bc)$

$V = abc$

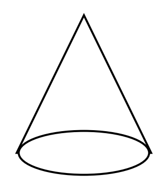
Cilindro



$A = 2\pi r.h + 2\pi r^2$

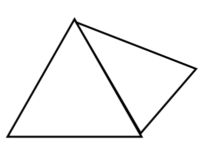
$V = \pi r^2 h$

Cono



$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h$

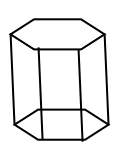
Pirámide



$A = AL + AB$

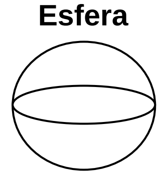
$V = \frac{AB.h}{3}$

Prisma



$V = AB.h$

Esfera



$A = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

UNIDAD 10: GENERALIDADES DE LA ESTADÍSTICA

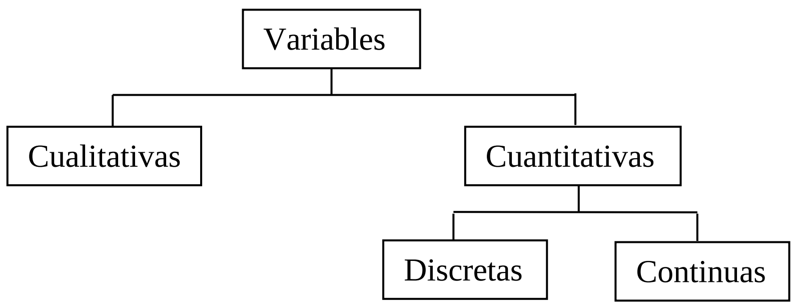
La estadística es la ciencia encargada de recoger, ordenar, analizar e interpretar datos numéricos para obtener conclusiones a partir de ellos.

Población: Es el conjunto de elementos sobre los cuales se va a estudiar una o varias características

Muestra: Es una parte representativa de la población, con la que se realiza el estudio estadístico y cuyos resultados son válidos para tola población

Variable: Es cada uno de los aspectos que pueden ser estudiados

Tipos de variables:



Las variables pueden ser de dos clases **cualitativas** y **cuantitativas**

Cualitativa: Una variable es cualitativa cuando no se puede medir ejemplo: sexo, lugar de nacimiento, color de piel, etc.

Cuantitativa: Una variable es cuantitativa cuando se puede medir ejemplo: número de hijos, el peso, la estatura, etc.

Las variables cuantitativas se dividen a su vez en discretas y continuas:

Discretas: cuando toma valores numéricos determinados ejemplo: el número de hermanos: 1, 3, 4, etc.

Continuas: cuando puede tomar números decimales ejemplo: la estatura: 1,73; 1,80; etc.

La estadística se divide en **estadística descriptiva** y **estadística inferencial.**

Estadística Descriptiva: Trabaja con el total de la población

Estadística Inferencial: Trabaja con muestras de la población y los resultados son válidos para toda la población, aquí es necesario mucho conocimiento de estadística, probabilidad y matemáticas.

Estadística I: Estudia la estadística descriptiva

Estadística II: Estudia la estadística inferencial

Aplicaciones de la estadística:

La estadística ha llegado hasta el punto de incursionar en la totalidad de las ciencias y de otros campos científicos es así, se utiliza estadística en física, química, y también en sociales, psicología. Ejemplo: establecer cuál de varios tratamientos es el mejor, elaborar modelos acerca del comportamiento humano.

La estadística es aplicada en campos tan diversos como la ingeniería, la medicina, la administración, y se convierte en una herramienta fundamental a la hora de tomar decisiones de importancia.

DESCRIPCIONES ESTADÍSTICAS

Organización y Representación de Datos:
Para organizar los datos recogidos en una encuesta se utilizan las tablas de frecuencias

Frecuencia absoluta: Está determinada por el número de veces que aparece cada valor en la variable. Se representa por $\boldsymbol{fi}$

Frecuencia relativa: Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de elementos de la muestra. Se representa por $\boldsymbol{hi}$

$$hi = \frac{fi}{n}$$

Frecuencia absoluta acumulada: Se obtiene sumando el valor de cada frecuencia con las frecuencias absolutas anteriores, se representa por $\boldsymbol{Fi}$**.**

Frecuencia relativa acumulada: Se obtiene sumando el valor de cada frecuencia relativa con las frecuencias relativas anteriores, se representa por $\boldsymbol{Hi}$**.**

Frecuencia porcentual: Es el resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100. Se representa por $\boldsymbol{hi}\%$

$$hi\% = hi * 100$$

Ejercicio: En una encuesta realizada a 25 estudiantes de una universidad acerca del número de libros que leen en el año se obtuvieron los siguientes datos: 6, 6, 7, 6, 7, 5, 5, 6, 7, 5, 4, 5, 4, 9, 3, 3, 9, 5, 5, 9, 5, 4, 5, 4, 8.

Realizar una tabla de frecuencias y contestar:
a. Cuántos alumnos leen 3 libros al año?
b. Cuántos alumnos leen al menos 5 libros al año?
c. Cuántos alumnos leen la mayor cantidad de libros al año y a qué porcentaje equivalen?
d. Cuántos alumnos leen menos de 7 libros al año y a qué porcentaje equivalen?

Solución:

x	Fi	hi	hi%	Fi	Hi	Hi%

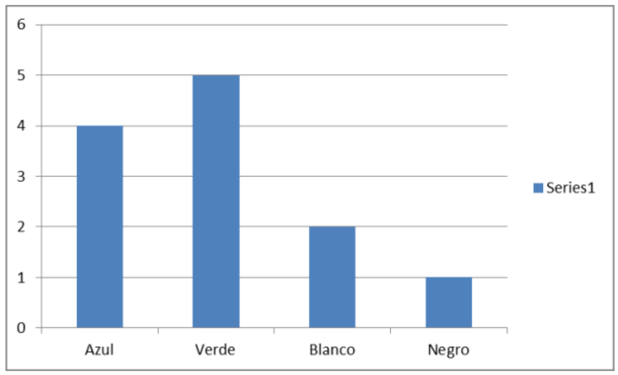
DIAGRAMAS:

Los diagramas son representaciones de la información recolectada. Hay varios tipos de diagramas: Gráfico de barras vertical, gráfico de barras horizontal, pictogramas, y gráfico circular.

Gráfico de barras verticales: Se representa el plano cartesiano, sobre el eje x se ubica los valores de las variables y sobre el eje y se ubican los valores de la frecuencia absoluta o porcentual o relativa.
En cada una de las alternativas de las variables se construyen rectángulos de igual base y de altura igual al valor de la frecuencia.

Ejemplo: De la siguiente tabla construir un gráfico de barras verticales.

Color Preferido	
X	Fi
Azul	4
Verde	5
Blanco	2
Negro	1
N	12



Del gráfico se puede concluir que el color de mayor preferencia es el verde, el de menor preferencia es el negro, 2 personas prefieren el color blanco, en la encuesta participaron 12 personas.

Gráfico de barras horizontales: Es un gráfico similar al anterior, solo que se intercambia la ubicación de los valores de la variable y la frecuencia

Ejemplo: Para la anterior tabla construir un gráfico de barras horizontales

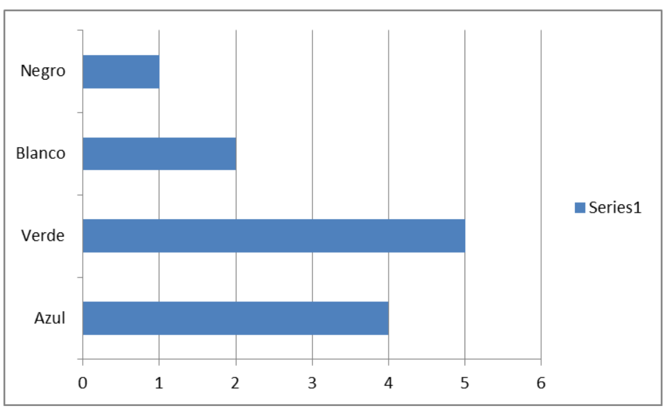


Gráfico Circular: En este tipo de gráfico se distribuye la información en sectores proporcionales dentro de un círculo. También son llamados diagramas de pastel o torta. El gráfico circular se utiliza para representar la frecuencia porcentual

Ejercicio: De la siguiente tabla, construir un gráfico circular.

Edad	Fi	hi%	Ángulo
15	3		
16	11		
17	9		
18	2		
N	25		

Solución:

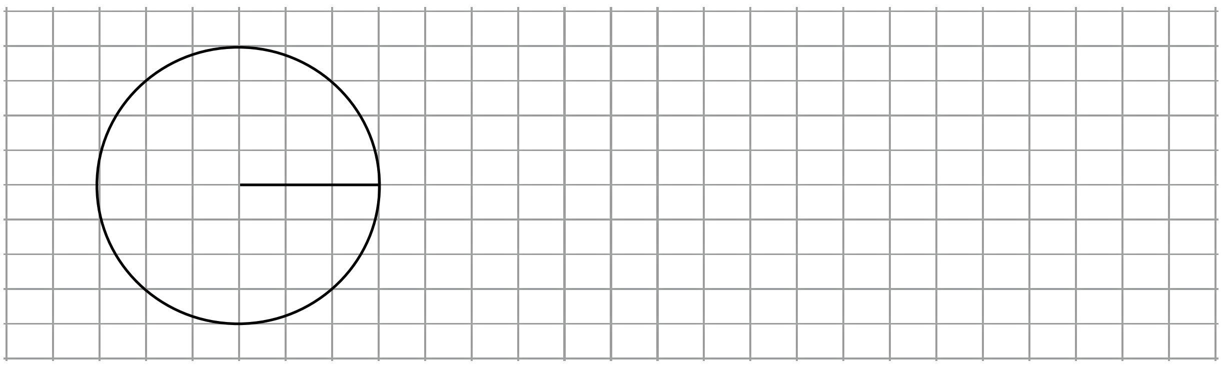
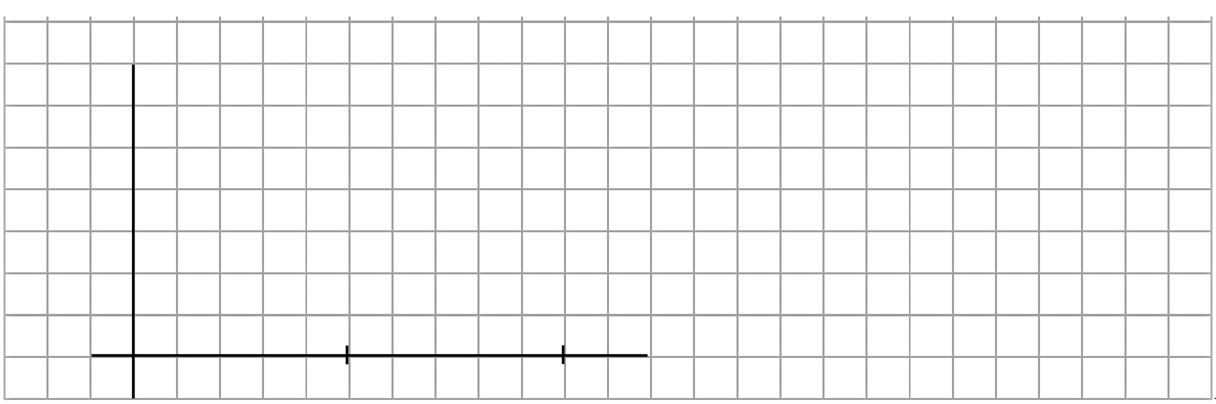


Gráfico de barras agrupadas:

En muchas ocasiones se desea representar en una misma tabla los datos obtenidos para dos variables o más, este tipo de ordenamiento permite establecer la forma en que podrían estar relacionadas las dos variables y así poder realizar comparaciones.

Ejercicio: Para la siguiente tabla realizar un gráfico de barras agrupadas

	Forma de pago		
Género	Contado	Crédito	Total
Femenino	8	5	13
Masculino	12	10	22
Total	20	15	35



MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas d tendencia central son valores que reflejan la tendencia de los datos a concentrarse en torno a un valor central. Las medidas de tendencia central son:

- La media aritmética o promedio
- La mediana o valor central
- La moda

Media aritmética o promedio: La media aritmética o promedio de un conjunto de datos es la suma de todos os datos dividida entre el número de datos. Se simboliza $\bar{x}$.

Ejercicio: Las edades de los alumnos de grado 11 de un colegio son: 16,15,15,18,17,16,16, 19, 17, 15, 18, 16
a. Hallar la edad promedio de los alumnos
b. Realizar una tabla donde se indique la frecuencia absoluta y con base a ella hallar la media o promedio

Solución:

a.

b.

Mediana o Valor central: La mediana de un conjunto de datos ordenados, se define como el valor de la variable que divide los datos en dos partes iguales y se simboliza $\boldsymbol{Me}$. Se presentan dos casos:

Caso 1: Cuando el número de datos es impar, la mediana coincide con el valor central de los valores de la variable ordenados de una manera creciente o decreciente.

Ejemplo: El salario mensual de una muestra de trabajadores de una empresa es: 770, 580, 950, 600, 700, 650, 900, 680, 1000, 650, 550. Encontrar la mediana.

Esto significa que

Caso 2: Cuando el número de datos es par, se escogen los valores centrales y se toma como mediana el promedio de estos dos valores.

Ejemplo: La rentabilidad de los accionistas el año pasado, para una muestra de empresas industriales fue:
5.6, 8.2, 13.6, 14.2, 7.5, 6.5, 6.0, 18.8, 4.5, 9.2, 12.4, 16.3, 8.8, 12.0. Hallar la mediana

Solución: ordenamos los datos en forma creciente:
4.5, 5.6, 6.0, 6.5, 7.5, 8.2, $\boxed{8.8,\ 9.2,}$ 12.0, 12.4, 13.6, 14.2, 16.3, 18.8

Esto significa que

Cuando los datos están en una tabla de frecuencias se procede así:

Ejemplo 1: Un grupo de personas presenta una prueba de aptitud, el número de respuestas incorrectas se muestra en la siguiente tabla:

No de respuestas incorrectas	No de personas
0	3
1	7
2	20
3	30
4	15
5	10
6	3
7	2
Total	90

Ejemplo 2: El número de empleados que tiene una muestra de pequeñas empresas, se muestra en la siguiente tabla:

Número de empleados	Número de empresas
3	4
4	12
5	20
6	24
7	30
8	15
9	8
10	7
Total	120

Lo cual significa que la mitad (50%) de las empresas tiene 6.5 empleados o menos y la otra mitad tiene 6.5 empleados o más.

Ejemplo 3: De la siguiente tabla encontrar la mediana

Número de empleados	Número de empresas
3	5
4	4
5	8
6	2
Total	19

La Moda: es el valor de la variable que más veces se repite, es decir el dato que aparece con mayor frecuencia, se simboliza $\boldsymbol{Mo}$**.** La moda representa el valor que es representativo de los elementos estudiados.

Ejemplo: 1. A una muestra de hogares se les midió el consumo de gas que habían tenido el mes pasado (en m^3).
22, 32, 34, 25, 18, 25, 24, 42, 7, 18, 25
$\rightarrow Mo =$

2. El conjunto 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16 carece de moda

Cuando los datos se encuentran en una tabla de frecuencias, la moda será el valor de la variable que representa la mayor frecuencia.

Ejemplo: El número de días que fallaron a su trabajo, los empleados de una empresa durante el año pasado se presentan en la siguiente tabla

X	Fi
0	6
1	12
2	8
3	7
4	2
Total	35

$\rightarrow Mo =$

LA MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA:
Cuando los diferentes valores que toma una variable se le asigna pesos o ponderaciones que indique la importancia que se le asigna a cada valor, se define la media ponderada como:

$$\bar{X}p = \frac{\sum xiwi}{\sum wi}$$

Donde $xi =$ son los diferentes valores que toma la variable
$wi =$ son los pesos o ponderaciones que se le asignan a cada uno de los valores de la variable

Ejemplo: Un alumno se postula a la universidad y obtiene los siguientes puntajes en las pruebas de selección universitaria

Prueba	Puntaje	Ponderación %
Lenguaje	680	30
Matemáticas	752	20
Ciencias	640	10
Sociales	720	40

Calcular su puntaje ponderado, es decir, la media aritmética ponderada de sus puntajes

MEDIDAS DE DISPERSIÓN:

Rango: Quizá la medida más sencilla de la dispersión en un conjunto de datos sea el rango. Es, simplemente la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de una serie de datos. $R = XM - Xm$

Ejemplo: El costo de producción de un artículo en 10 fábricas en pesos es:
2400 2450 2380 2520 2700 2470 2670 2550 2390 2510

$Rango =$

Significa que:

Aunque el rango es la medida de dispersión más fácil de calcular, casi nunca se utiliza como la única medida de dispersión. La razón es que se basa sólo en dos de los elementos y por consiguiente, está muy influido por los valores extremos de los datos.

Varianza: Se define como el promedio de las diferencias al cuadrado entre los valores que toman la variable y su media aritmética. Se simboliza s^2 ó $\boldsymbol{\sigma^2}$.

$$\sigma^2 = \frac{\sum\left(xi - \bar{x}\right)^2}{N} \qquad \rightarrow \text{Varianza poblacional}$$

Donde:
$xi =$ Valores que toma la variable
$\bar{x} =$ La media aritmética
$N =$ número de elementos de la población

La varianza expresa en promedio que tanto se alejan los valores de la media aritmética, se expresa en unidades al cuadrado (Kg^2, $personas^2$, etc.)

OBSERACIÓN:

Es recomendable recordar que la varianza es una medida útil para comparar el grado de dispersión de dos o más conjuntos de datos. Al comparar conjuntos de datos, el que tiene mayor varianza tiene la mayor dispersión o variabilidad.

Ejemplo1: La experiencia en años en su oficio de una muestra de operarios de una fábrica es: 12, 8, 10, 5, 25. Determinar la varianza:

Solución:

Experiencia de los operarios (años)	$(xi - \overline{x})$	$(xi - \overline{x})^2$
TOTAL		

Desviación Estandar: Se define como la raíz cuadrada de la varianza.

$S = \sqrt{S^2}$

Ejemplo: Si tomamos la varianza del ejemplo 1 tenemos que la desviación estándar es:

$S = \sqrt{S^2}$

$S =$

Lo cual significa que

Coeficiente de variación: El coeficiente de variación de un conjunto de datos se define como el cociente entre la desviación estándar y la media aritmética.

$$CV = \frac{S}{\overline{x}}$$

El coeficiente de variación también se puede expresar en porcentaje (mltiplicando por 100%).

El coeficiente d variación facilita la interpretación de la desviación de los datos respecto a la media.

- Entre $0 - 15\%$ tienen muy poca dispersión
- $15 - 30\%$ presentan dispersión moderada (homogéneos)
- $30\%\ o\ más$ los valores tienen una alta dispersión (heterogéneos)

PROBABILIDAD:

La probabilidad es una medida numérica entre 0 y 1 que mide la opción que en un futuro ocurra un evento específico como resultado de un experimento.

- Cuando el resultado es imposible se le asigna el valor 0.
- Cuando el resultado es seguro se le asigna el valor 1.

Un experimento aleatorio es un proceso en el que se conoce el conjunto de resultados posibles, pero no se puede predecir cuál de ellos va a ocurrir.

Ejemplo: Al lanzar un dado al aire tenemos que es probable que salga el número 3 ero es imposible que salga el número 7.

Espacio Muestral: Es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio: Se representa con la letra E.

Ejemplo: Al lanzar un dado al aire el espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Al lanzar una moneda, el espacio muestral es $E = \{cara, sello\}$

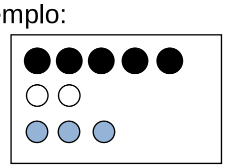
Para hallar la probabilidad utilizamos la fórmula

$$P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ posibles\ de\ A}{Total\ de\ casos\ posibles}$$

Ejemplo: Si se lanza una moneda al aire, la probabilidad de sacar cara es:
$P(cara) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Ejemplo: Si se lanza un dado al aire, la probabilidad de que salga 5 es:
$P(5) = \frac{1}{6} = 0{,}16$

Ejemplo:



Se tiene una urna como la anterior calcular:

a. $p(negra) =$

b. $p(blanca) =$

c. $p(azúl) =$

DIAGRAMA DE ÁRBOL: Es una técnica que permite obtener todos los resultados posibles en algunas situaciones de azar.

Ejemplo: Si se lanza dos veces una moneda al aire, los posibles resultados son:

Cara < cara → cara, cara
sello → cara, sello

Sello < cara → sello, cara
sello → sello, sello

Considerando los resultados posibles, hallar:

a. $p(2\ caras) =$

b. $p(1\ sello) =$

c. $p(0\ caras) =$

Ejercicio:
1. Realizar un diagrama de árbol para el experimento lanzar una moneda y un dado. Escribir el espacio muestral del experimento

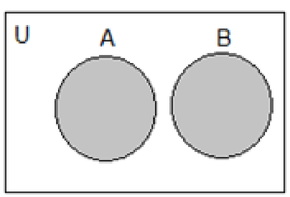
Solución:

2. Se lanza 3 veces una moneda al aire. Calcular la probabilidad de:
a. Que salgan 2 caras
b. Que al menos 1 sea sello
c. que al menos 2 sean sellos

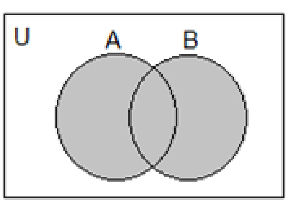
Solución:

REGLAS BÁSICAS DE PROBABILIDAD:

Existe una marcada relación entre la teoría de conjuntos y la teoría de probabilidad derivándose algunas expresiones que representan las operaciones entre conjuntos.

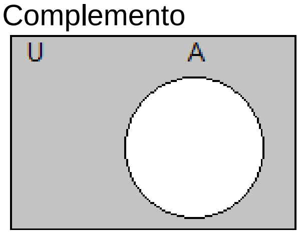


Aquí son eventos disjuntos o excluyentes



Aquí se dice que los eventos son no disjuntos o no excluyentes

Complemento

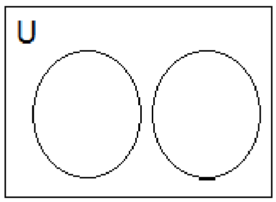


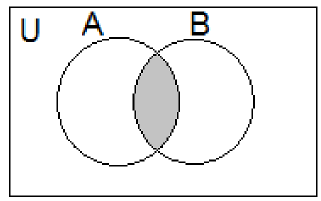
A’ se conoce como el complemento de un evento

P(A) = probabilidad de ocurrencia de un evento.
P(A') = probabilidad de no ocurrencia de A.
Sabemos que 0<P<1 la probabilidad está entre 0 y 1
$\Rightarrow P(A) + P(A') =$

Intersección:

Cuando los eventos son disjuntos *No disjuntos*



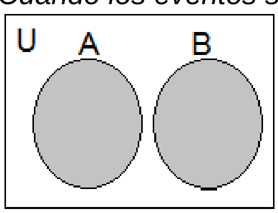


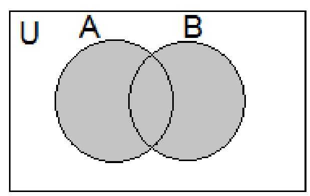
A∩B= Ø A∩B

Si A ocurre y B ocurre se representa por A∩B, es decir P(A∩B) = P(A y B)

Unión de Eventos:

Cuando los eventos son disjuntos *No disjuntos*





AUB AUB

Si A ocurre o B ocurre se representa por AUB, es decir P(AUB) = P(A o B)

EVENTOS EXCLUYENTES Y EVENTOS NO EXCLUYENTES:

Eventos Excluyentes:

Dos o más eventos son excluyentes o disjuntos, si no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento o (eventos).

Ejemplo: Al lanzar una moneda solo puede ocurrir que salga cara o sello pero no los dos a la vez, esto quiere decir que estos eventos son excluyentes.

Eventos No excluyentes:

Dos o más eventos son no excluyentes, cuando es posible que ocurran ambos. Esto no indica que necesariamente deban ocurrir estos eventos en forma simultánea.

Ejemplo: Si consideramos al lanzar un dado que salga par o primo, en este caso el dos es par y es primo.

REGLAS DE ADICIÓN:

La probabilidad de ocurrencia de 2 sucesos A y B es igual a:

$P(AUB) = P(A) + P(B)$ si A y B son excluyentes

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si A y B son no excluyentes

Ejemplo:

Se lanza un dado al aire, encontrar la probabilidad de obtener un número par o primo.

Eventos independientes:

Dos o más eventos son independientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro evento o (eventos). Un caso típico de eventos independientes es el muestreo con **reposición**, es decir, una vez tomado la muestra se regresa de nuevo a la población de donde se obtuvo.

Ejemplo: Al lanzar 2 veces una moneda son eventos independientes porque el resultado del primer evento no afecta sobre la probabilidad de que ocurra cara o sello en el segundo evento.

Eventos dependientes:

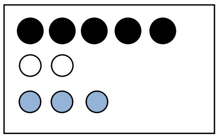
Dos o más eventos son dependientes cundo la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de la ocurrencia del otro.

REGLAS DE MULTIPLICACIÓN:

Se relacionan con la determinación de la ocurrencia conjunta de dos o más eventos. Es decir la intersección entre los conjuntos de los posibles valores de A y B, esto quiere decir que la probabilidad de que ocurran conjuntamente los eventos A y B es

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ si A y B son independientes

Ejemplo: Se tiene una urna como la siguiente:



Si se extraen de a uno, tres (3) pimpones sin devolver ninguno a la caja calcular *(eso se llama sin reposición)*:

a. La probabilidad de que los tres sean azules
b. La probabilidad de que el primero sea azul, el segundo negro y el tercero blanco

Para la misma urna anterior, Si se extraen de a uno, tres (3) pimpones devolviendo cada uno a la caja, calcular *(eso se llama con reposición)*:

a. La probabilidad de que los tres sean azules
b. La probabilidad de que el primero sea azul, el segundo negro y el tercero blanco

Ejercicios:

1. Hallar la probabilidad de obtener un número primo o un número compuesto al lanzar un dado

2. Calcular la probabilidad de obtener un número impar o un número primo al lanzar un dado

3. Calcular la probabilidad de obtener tres cuatros al lanzar tres dados.

4. Sean A y B dos sucesos aleatorios con probabilidad de
$P(A) = 3/8$ $\quad$ $P(B) = 1/2$ $\quad$ $P(A \cap B) = 1/4$

Hallar:
a. $P(A \cup B)$ $\quad$ b. $P(A')$ $\quad$ c. $P(B')$

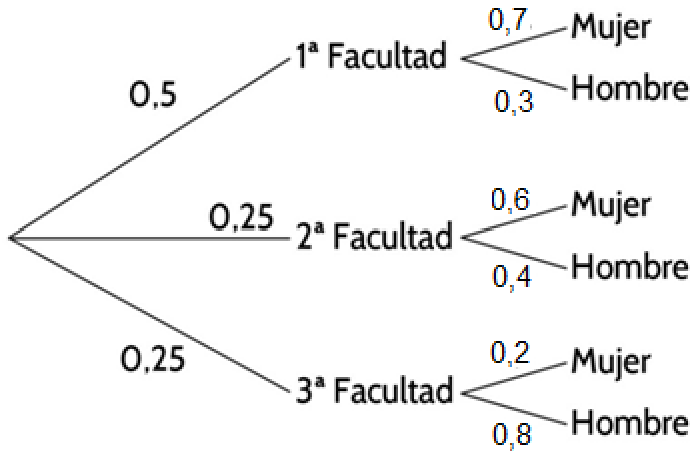
5. De una baraja de 48 cartas se extrae dos de ellas una a una sin reposición, calcular la probabilidad de que:
a. Las dos sean copas
b. la primera sea copa y la segunda espada

6. Un grupo de personas fue clasificado según el género y nivel educativo así:

Nivel Educativo	Masculino	Femenino	Total
Primaria	48	45	93
Secundaria	28	40	68
Universitario	12	7	19
Total	88	92	180

Si se selecciona al azar una persona de ese grupo determinar las siguientes probabilidades
a. Probabilidad secundaria
b. $P(S \cap M)$ secundaria y masculino
c. $P(S \cup F)$ secundaria o femenino
d. $P(S - M)$ secundaria y no masculino
e. $P(F - U)$ que sea mujer y no tenga nivel universitario

7. El siguiente diagrama de árbol representa la distribución de hombres y mujeres en tres facultades de una universidad de la ciudad.



Calcular las siguientes probabilidades:
a. Probabilidad de que sea mujer y que estudie en la primera facultad
b. Probabilidad de encontrar un alumno varón

REGLAS DE CONTEO

COMBINACIONES:

Son las diferentes formas de elegir cierta cantidad de elementos de un conjunto, sin importar el orden en que se eligen, en las combinaciones el conjunto {a,b} es igual al conjunto {b,a}.

Hay 2 tipos de combinaciones: Regla del producto y combinaciones o combinaciones sin repetición.

1. Regla del producto: El número de combinaciones que se pueden hacer en un proceso de varias etapas es igual al producto de las alternativas en cada etapa, en símbolos:

$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots$

Ejemplo:

a. De cuántas maneras diferentes se puede vestir con 2 blusas 3 faldas y 2 pares de zapatos

Solución:

b. Cierta ensambladora produce 4 modelos de automóvil, si sólo se pintan de color gris, rojo y azul, determinar la variedad de automóviles que pueden producirse.

Solución:

2. Combinaciones o combinaciones sin repetición:

Ejemplo: De una junta compuesta por 10 personas se va a sacar la comisión de empalme compuesta por 4 personas, ¿de cuántas formas se puede sacar esa comisión?

Ejemplo: Dado el conjunto A={a,b,c,d,e}, cuántos subconjuntos de 3 elementos se pueden formar.

VARIACIONES:

En las variaciones es distinto el conjunto {a,b} del conjunto {b,a}. se presentan 3 casos: permutaciones, variaciones sin repetición y variaciones con repetición.

1. Permutaciones: Tiene las siguientes características:

- El número de elementos es igual al número de lugares
- Interesa el orden en que se ubican los elementos

Ejemplo 1: de cuántas maneras 5 personas pueden sentarse en 5 sillas libres?

Solución:

Ejemplo 2: De cuántas maneras se pueden ordenar de forma lineal un círculo, un cuadrado y un triángulo.

Solución:

2. Variaciones ordenadas sin repetición: Tiene las siguientes características
- El número de elementos es distinto del número de lugares
- Un mismo elemento no puede aparecer repetido
- Interesa el orden en que se ubican los elementos

Ejemplo: De cuántas maneras pueden sentarse 7 personas en 5 sillas libres

Solución:

Ejemplo: Diana tiene 4 libros pero en el estante solo caben 2, ¿de cuantas formas se pueden colocar los libros en el estante?

Solución:

3. Variaciones con repetición: Tiene las siguientes características:
- Un elemento puede aparecer repetido
- Interesa el orden en que se ubican los elementos

Ejemplo: Para recolectar fondos se organiza una rifa con boletas de 4 dígitos, ¿cuántas balotas se pueden hacer?

Solución:

Ejercicio: De un grupo formado por 6 hombres y 10 mujeres se desea formar un comité formado por 3 hombres y 2 mujeres. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar el comité?

Solución

INSEG
TALLER 4 ESTADISTICA 11
Grado: 11 Profesor: Franco Melo

Probabilidades

1. Se lanzan dos dados. Encontrar la probabilidad de que:
a. Salga 6 en los dos dados.
b. El primero caiga en 2 y el segundo en 5.
b. Los puntos obtenidos sumen 7.

2. Ante un examen, un alumno sólo ha estudiado 15 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. Este se realiza extrayendo al azar dos temas. Cuál es la probabilidad de que el alumno:
a. Escoja dos preguntas de los temas que estudió
b. Escoja dos preguntas de los temas que No estudió
c. Escoja la primera pregunta de los temas que estudió y la segunda de los temas que no estudió.

3. Una clase consta de 10 hombres y 20 mujeres; la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos castaños. Determinar la probabilidad de que una persona elegida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños.

4. Los estudiantes A y B tienen respectivamente probabilidades 1/2 y 1/5 de perder un examen. La probabilidad de que pierdan el examen simultáneamente es de 1/10. Determinar la probabilidad de que cualquiera de los dos estudiantes pierda el examen.

5. Cuál es la probabilidad de que lanzando al aire 3 veces una moneda se obtenga al menos un sello?

6. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de puntos obtenidos. Se pide:
a. La probabilidad de que salga el 7
b. La probabilidad de que el número obtenido sea primo
c. La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de 3.

7. Cuál es la probabilidad de obtener un as al extraer una carta de una baraja de 52 cartas?.

8. En una clase, el 60% de os alumnos juega al fútbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además hay un 60% que no juega al fútbol, cuál será la probabilidad de que escogido al azar un alumno de la clase:
a. Juegue sólo al fútbol
b. Juegue sólo al baloncesto
c. Practique uno sólo de los deportes
d. No juegue ni al fútbol ni al baloncesto