Institucion Educativa

JUAN PABLO I

La Llanada Nariño.

Matematicas.

GRADO 9º

MODULO EDUCATIVO 3

Aulas sin fronteras

Los contenidos educativos de Aulas sin Fronteras buscan apoyar a los docentes mediante la producción de planes completos en secuencias didácticas acompañadas por video clips y recursos impresos para estudiantes.

ALCALDÍA MUNICIPAL
LA LLANADA
NIT: 800.149.894-0
Comprometidos con la comunidad

MUNICIPIO LA LLANADA

Colombia aprende
La red del conocimiento

El futuro es de todos
Gobierno de Colombia

Gobernación de Nariño
¡EN DEFENSA DE LO NUESTRO!

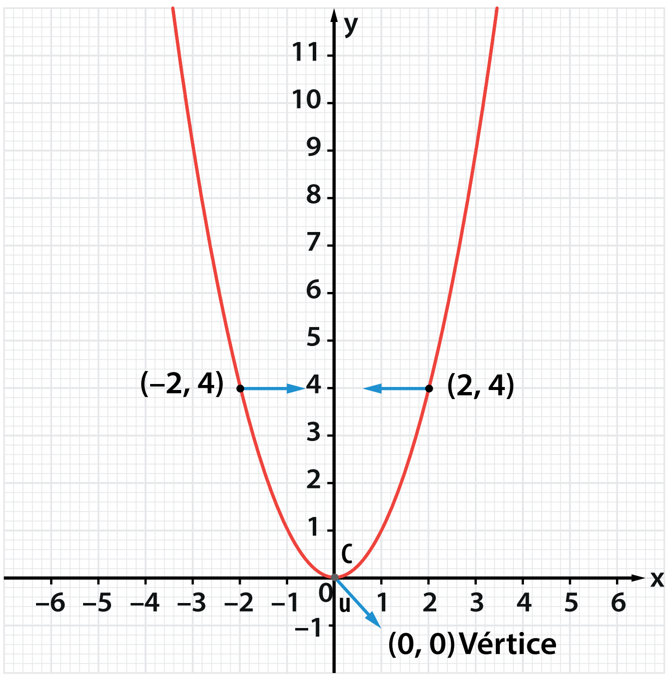
Clase 1 Esta clase tiene video

Tema: Funciones cuadráticas

Actividad 1

Algunas funciones cuadráticas se representan con la expresión $f(x) = x^2$ y su correspondiente gráfica recibe el nombre de parábola. 1

1 **Observe la parábola que representa la función: $f(x) = x^2$**



1 En las siguientes imágenes se pueden ver arcos cuya forma se aproxima a una **parábola**.

- Escriba en qué otros ejemplos de la vida real encuentra formas que se parecen a la gráfica de las funciones cuadráticas.

____

____

____

2 **Lea con atención las características de la parábola que representa la función $f(x) = x^2$. Verifique cada característica en la gráfica dada al inicio de la actividad.**

- La gráfica de $f(x) = x^2$ se conoce con el nombre de **parábola normal**.
- Es simétrica al eje y. La ecuación del eje y es $x = 0$.
- En este caso, el punto (0; 0) es el punto de corte de la parábola normal con el eje de simetría y se llama vértice.

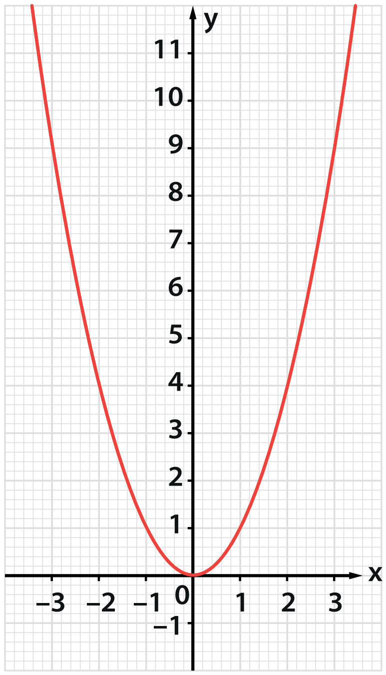
Actividad 2

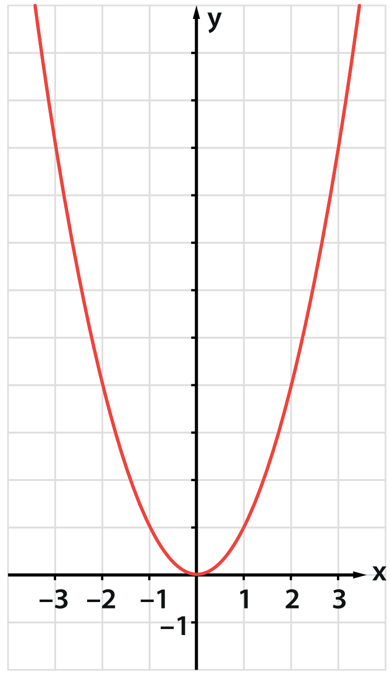
La siguiente tabla establece algunos valores correspondientes a la función $f(x) = x^2$.

1 **Complete la tabla realizando el cálculo y verifique con la gráfica de la actividad 1 los puntos encontrados.**

$f(x) = -x^2$												
	x	−3	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
	y											

2 Elabore una plantilla de la parábola normal. Para ello necesita papel milimetrado y cartulina; dibuje un plano cartesiano en el papel milimetrado con unidad de 1 cm y ubique los puntos de la tabla anterior y trace la parábola. Guíese con la gráfica que se presenta en la actividad 1a, y copie este plano sobre un acetato. Podrá usar la plantilla para examinar los cambios de la parábola. Observe las imágenes que muestran el procedimiento.



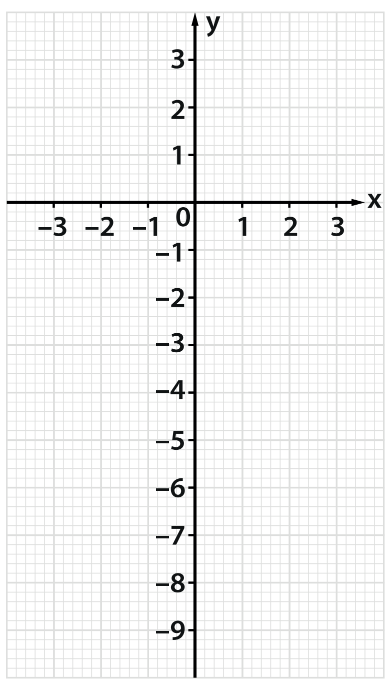


Actividad 3

1 Complete la tabla de valores de la función $f(x) = -x^2$.

$f(x) = -x^2$												
	x	−3	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
	y											

2 Ubique cada una de las coordenadas (x, y) obtenidas de la tabla en el plano cartesiano. Luego una estos puntos en el orden establecido por los valores de x; la unión entre los puntos debe conservar un trazo curvo.



3 ¿Qué diferencias observa entre las tablas de valores de las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = -x^2$?

4 ¿Cómo es la gráfica de $f(x) = -x^2$ con respecto a $f(x) = x^2$?

5 ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola que representa la función $f(x) = -x^2$?

6 ¿Cuál es el eje de simetría de la gráfica de $f(x) = -x^2$? ____________

7 En conclusión, ¿qué efecto tiene el signo menos sobre la parábola $f(x) = x^2$?

Actividad 4

Complete las siguientes tablas de valores correspondiente a las funciones

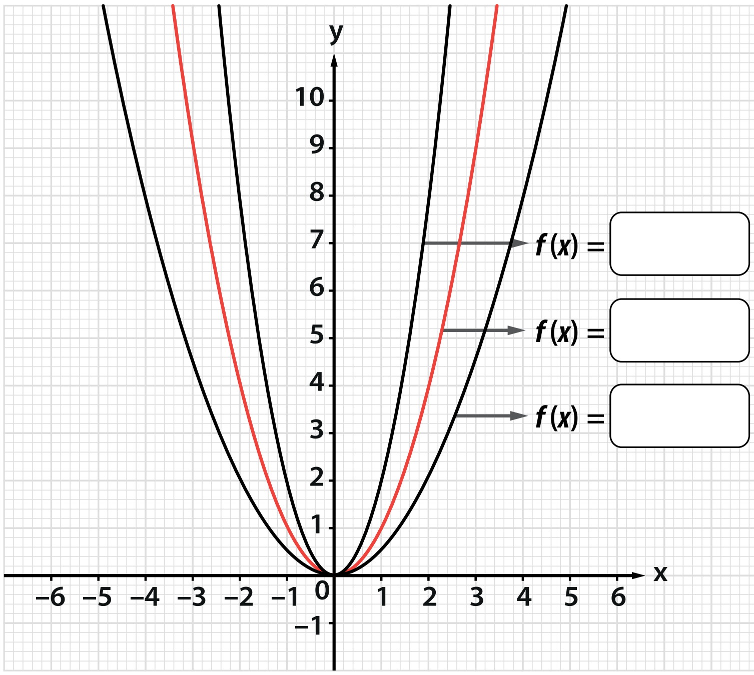
$$f(x) = x^2 \quad ; \quad f(x) = 2x^2 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$f(x) = x^2$												
	x	−3	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
	y											

$f(x) = 2x^2$												
	x	−3	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
	y											

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$												
	x	−3	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
	y											

1 **Según las coordenadas obtenidas en las tablas de valores, escriba la función que representa cada una de las siguientes parábolas.** **2**



2

Para la función cuadrática $f(x) = ax^2$, se tiene que:

Si $0 < a < 1$ la parábola es una dilatación con respecto a la parábola normal.

Si $a > 1$, la parábola se contrae con respecto a la parábola normal

Si $a < 0$, la parábola es un reflejo en el eje x de la parábola normal.

- Grafique en el programa Geogebra tres funciones cuadráticas que ejemplifiquen lo anterior.

2 **¿Qué le ocurre a la grafica de la parábola normal cuando la ecuación es multiplicada por 2?**

____

3 **¿Cuál es el vértice de la parábola que representa la función $f(x) = 2x^2$?** ____________________

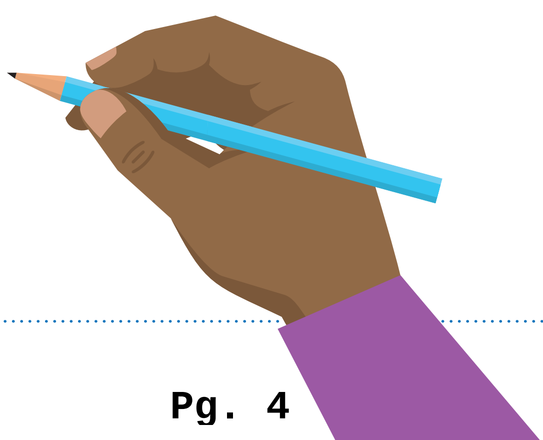
4 **¿Cuál es el eje de simetría de la gráfica de esta función?** ____________________

5 **¿Qué le ocurre a la gráfica de la parábola normal cuando la ecuación es multiplicada por $\frac{1}{2}$?**

____

6 **¿Cuál es el vértice de la parábola que representa esta función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$?** ____________________

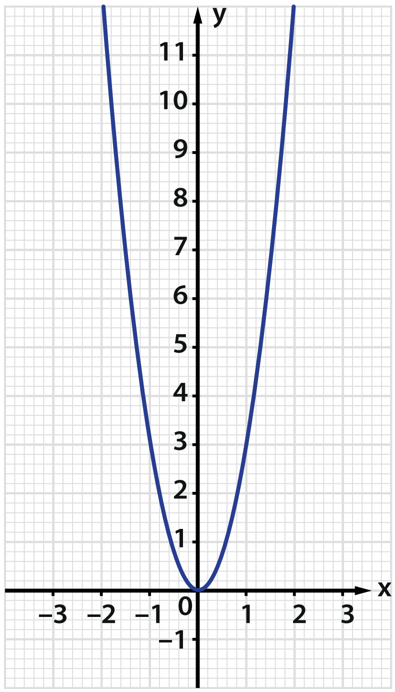
7 **¿Cuál es el eje de simetría de la gráfica de esta función?** ____________________



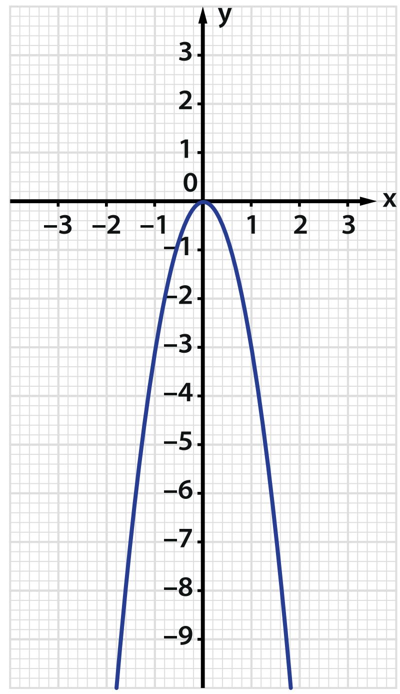
Actividad 5

Escriba una función de la forma $f(x) = ax^2$ para cada una de las parábolas.

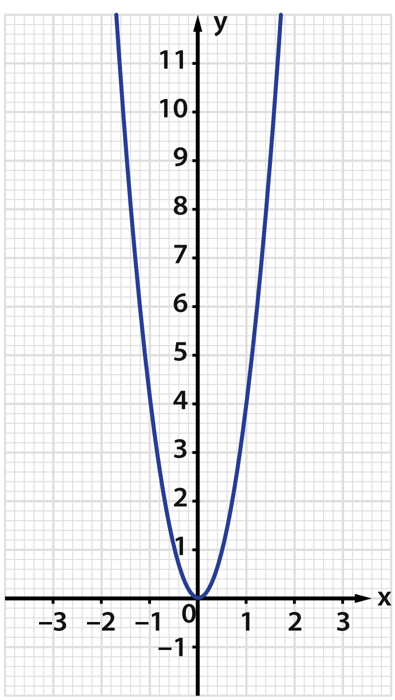
1



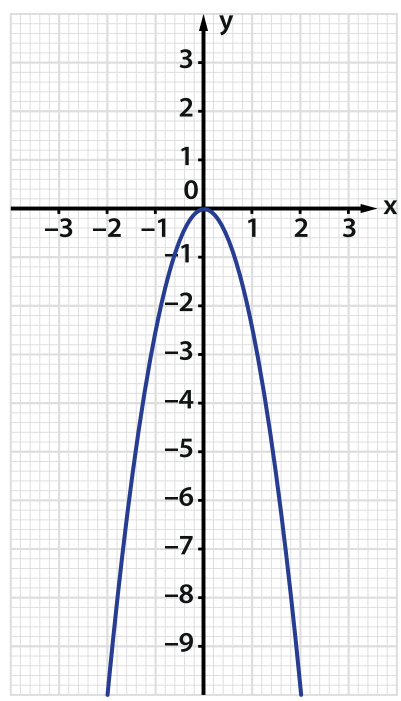
2



3



4

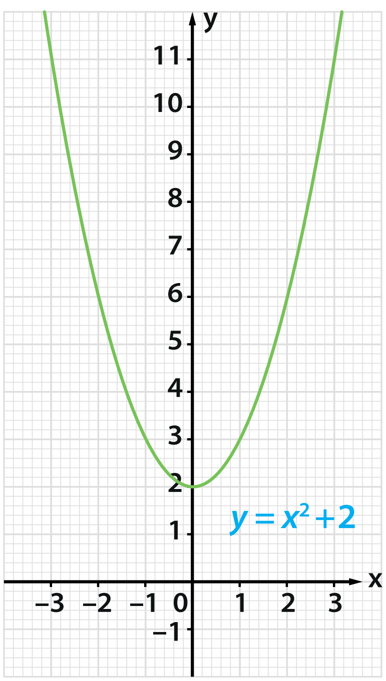


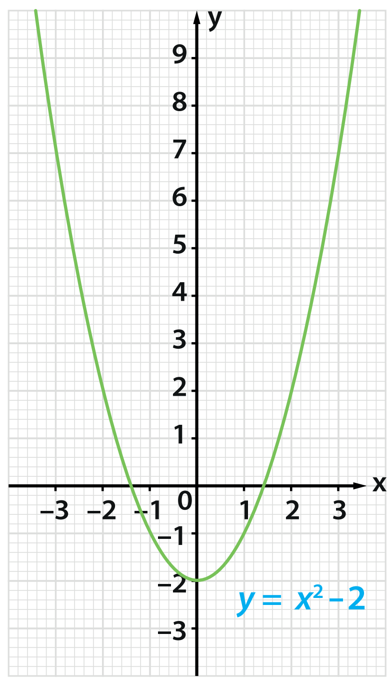
Clase 2

Tema: Funciones cuadráticas de la forma $y = x^2 + e$

Actividad 6

Observe las siguientes gráficas de funciones cuadráticas y la expresión algebraica que las describe.





1. **Describa cómo se obtienen las gráficas anteriores partiendo de la gráfica representada por la función $y = x^2$**

2. **¿Qué representa el número 2 en cada una de las expresiones de las funciones?**

3. **Escriba las coordenadas del vértice de cada una de las parábolas.**

   V (______ ; ______) V (______ ; ______)

4. **¿Qué le pasa a la gráfica de la función $y = (x - 100)\, x^2 - 100$ en relación con la gráfica de la función $y = x^2$?**

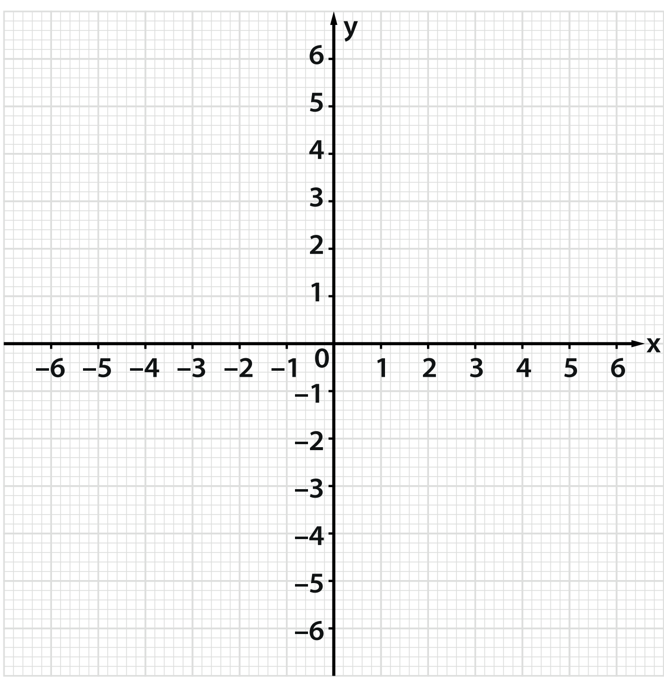
Actividad 7

Elabore la tabla de valores y dibuje la gráfica de las siguientes funciones cuadráticas en el mismo sistema de coordenadas. Identifíquelas con un color diferente. 3

1 **Parábola:** $y = x^2 + 3$

2 **Parábola:** $y = x^2 - 3$

3 **Parábola:** $y = x^2 + 2{,}5$



3

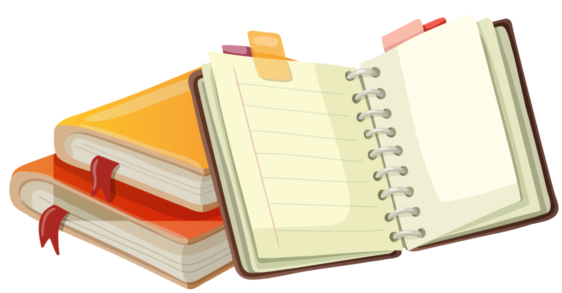
Las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma

$$y = x^2 + e$$

Son parábolas normales trasladadas en el eje *y*.

Su vértice es $V\,(0\,;\,e)$

Su eje de simetría es el eje *y*. Es decir, la recta $x = 0$.

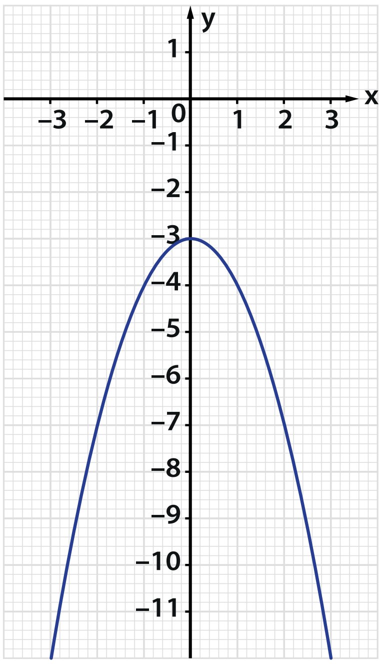


4 **Escriba el vértice de cada una de las parábolas anteriores.**

Vértice de la parábola 1: ______ **Vértice de la parábola 2:** ______ **Vértice de la parábola 3:** ______

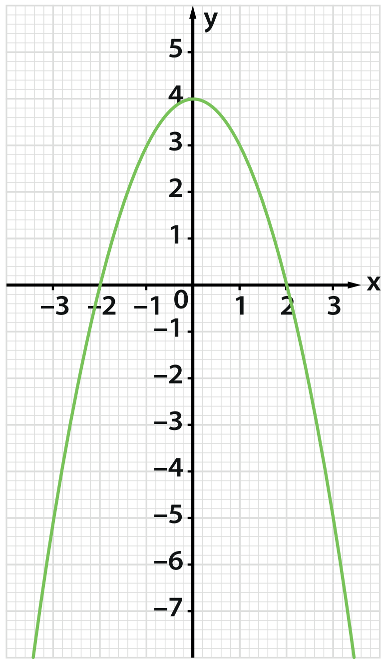
Actividad 8

Escriba las expresiones algebraicas de las funciones representadas en cada gráfica. Escriba también las coordenadas del vértice de la parábola.

1


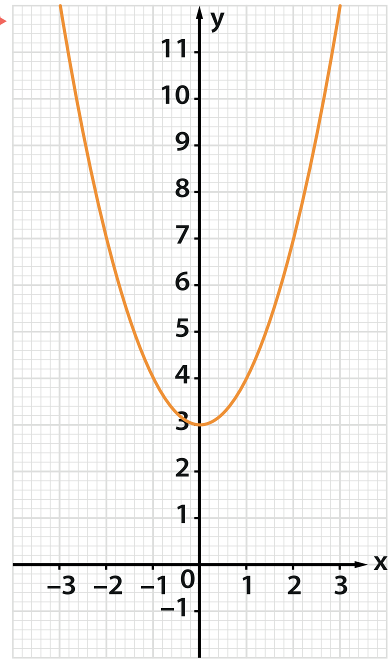
$f(x) =$ ______________

V (_____ , _____)

2


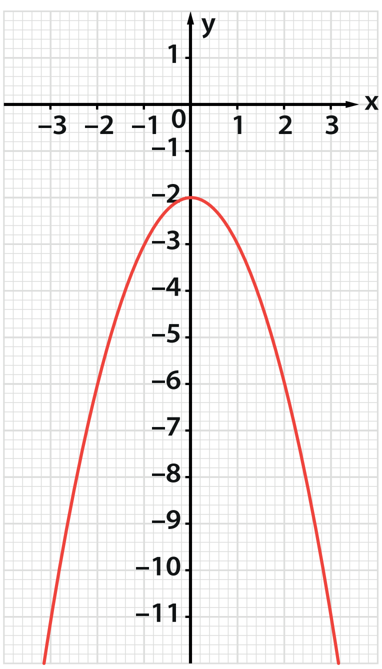
$f(x) =$ ______________

V (_____ , _____)

3


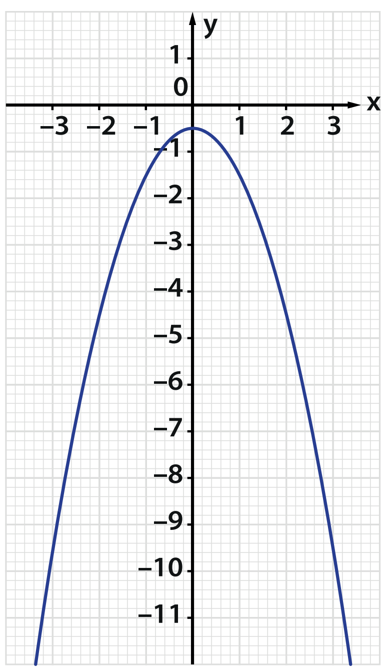
$f(x) =$ ______________

V (_____ , _____)

4


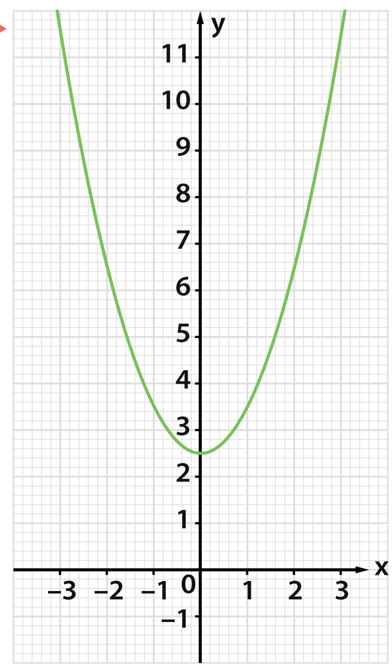
$f(x) =$ ______________

V (_____ , _____)

5


$f(x) =$ ______________

V (_____ , _____)

6


$f(x) =$ ______________

V (_____ , _____)

Clase 3

Tema: Funciones cuadráticas de la forma $y = (x + d)^2$

Actividad 9

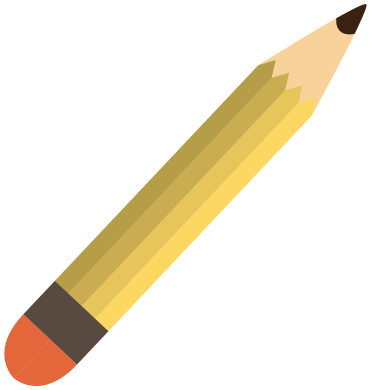
1. Complete las siguientes tablas de valores correspondientes a las funciones

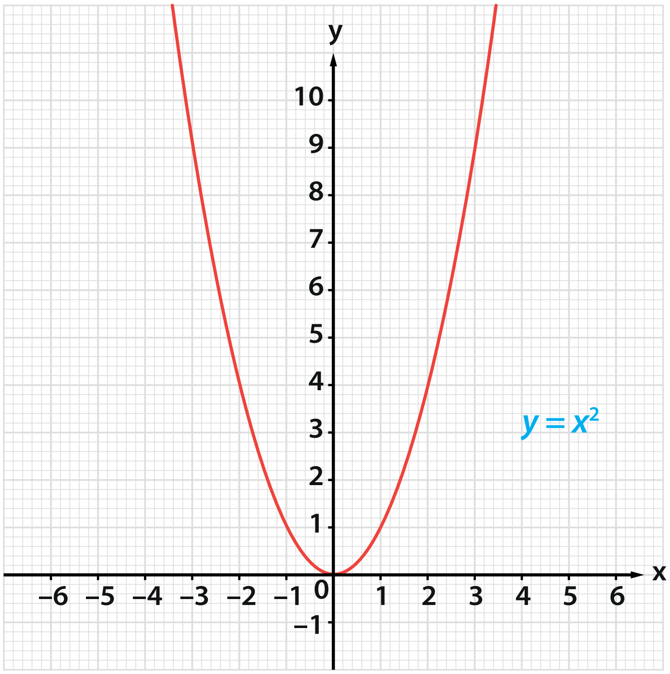
$f(x) = (x + 2)^2$ y $f(x) = (x - 2)^2$

$f(x) = (x + 2)^2$	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	y									

$f(x) = (x - 2)^2$	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	y									

2. Teniendo en cuenta los valores de las tablas realice la gráfica de cada una de las funciones cuadráticas en el plano cartesiano.





Actividad 10

Compare las tres parábolas que se obtuvieron en la gráfica anterior y responda.

1. ¿Qué le ocurre a la parábola de la función $y = (x + 2)^2$ con respecto a la parábola $y = x^2$?

____

2. Escriba las coordenadas del vértice de la parábola $y = (x + 2)^2$. V(_____ , _____)

3 ¿Qué le ocurre a la parábola de la función $y = (x - 2)^2$ con respecto a la parábola $y = x^2$?

____

4 Escriba el vértice de la parábola de la función $y = (x - 2)^2$. V (____ , ____)

5 En general, qué le ocurre a la parábola de la función $y = (x + d)^2$ y $y = (x - d)^2$

____

____

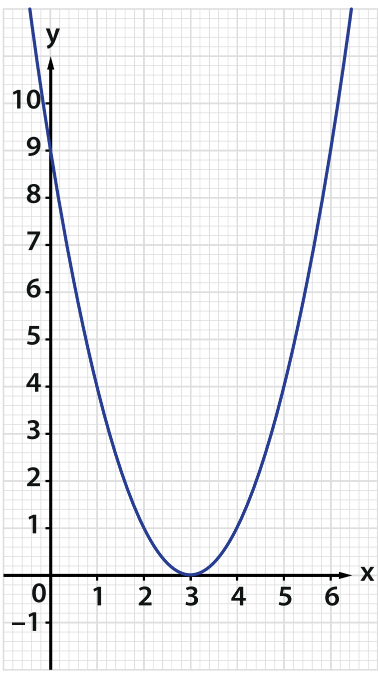
6 Escriba el vértice de cada una de las parábolas.

$y = (x + d)^2$ V (____ , ____) $y = (x - d)^2$ V (____ , ____)

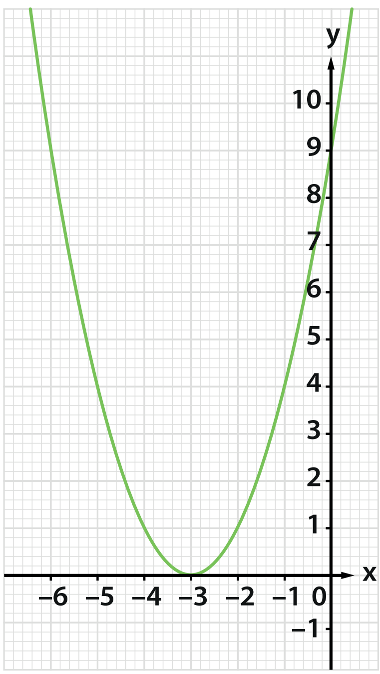
Actividad 11

Escriba la expresión algebraica que describe cada una de las funciones cuadráticas representadas. Luego, escriba su vértice.

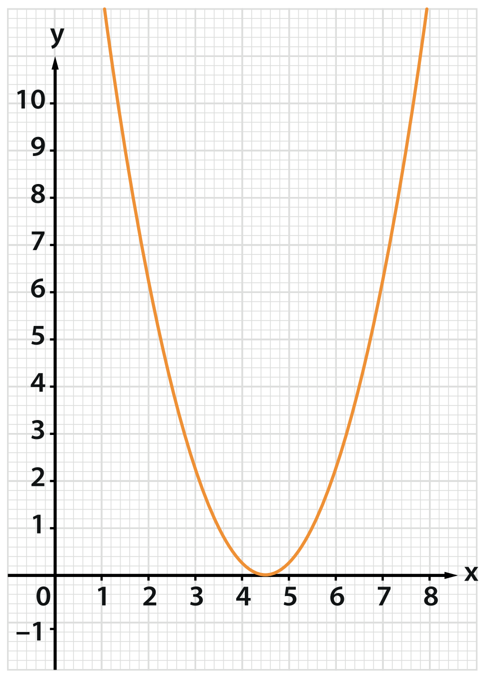
1



2

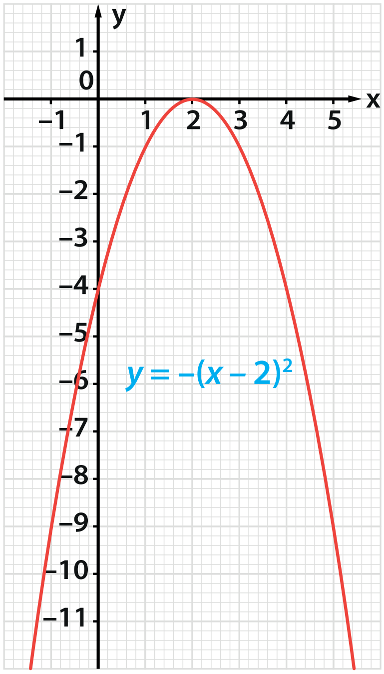


3



Actividad 12

Observe la gráfica de la función cuadrática y su correspondiente expresión algebraica.



1 **¿Qué cambio tuvo la parábola $y = x^2$ en relación con $y = -(x-2)^2$?**

____

2 **¿Cuáles son las coordenadas del vértice de esta parábola?**

V (_____ , _____)

3 **¿Cuál es la ecuación del eje de simetría de la parábola $y = -(x-2)^2$?**

____

4 **Lea la siguiente información**

Las gráficas de las funciones de la forma $y = (x - \mathbf{d})^2$ y $y = (x + \mathbf{d})^2$ se pueden obtener haciendo una traslación en el eje x de la parábola $y = x^2$. Dicha traslación será de **d** unidades a la derecha (si **d** es negativo) o **d** unidades a la izquierda (si **d** es positivo).

- Si **d** es negativo, el vértice de la parábola está en el punto V (**d** , 0) y el eje de simetría es la recta $x = \mathbf{d}$.
- Si **d** es positivo, el vértice está ubicado en el punto V (–**d**, 0) y el eje de simetría es la recta de ecuación $x = -\mathbf{d}$

Actividad 13

Escriba la expresión algebraica de la función y el vértice de la parábola que la representa.

1 **La parábola normal se trasladó 4 unidades hacia la derecha del eje *x*.**

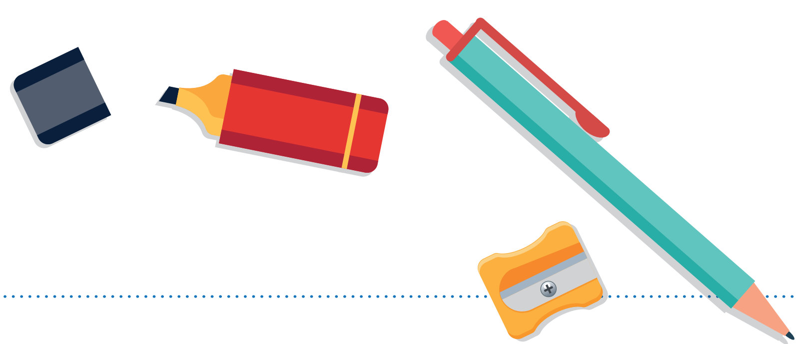
$y =$ ______________________ V(_____ , _____)

2 **La parábola normal se trasladó 3,5 unidades hacia la izquierda del eje *x*.**

$y =$ ______________________ V(_____ , _____)

3 **La parábola normal fue reflejada en el eje *x* y se trasladó hacia la derecha del mismo eje 2 unidades.**

$y =$ ______________________ V(_____ , _____)

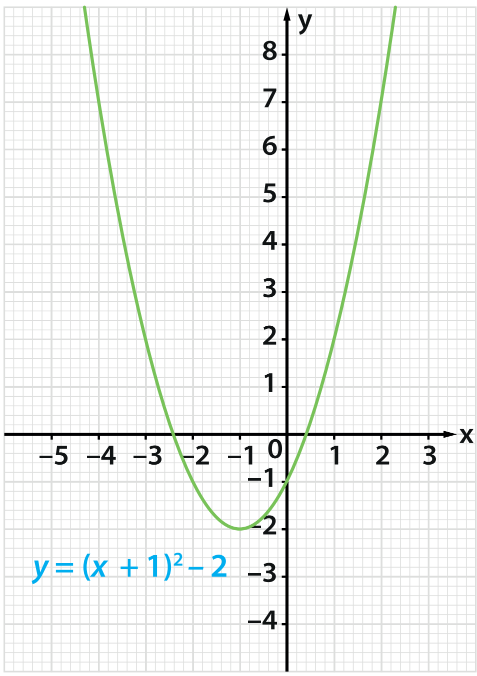


Clase 4

Tema: Funciones cuadráticas de la forma $y = (x + d)^2 + e$

Actividad 14

Observe la gráfica de la función cuadrática y la expresión algebraica que la representa y complete cada enunciado de acuerdo a la información dada en la gráfica.



> Todas las funciones cuadráticas de la forma
>
> $y = (x + d)^2 + e$
>
> Tienen como **vértice** $V(–d\,;\,e)$

1. **La parábola normal fue trasladada ________ unidades a la izquierda del eje *x*.**
2. **La parábola normal fue trasladada ________ unidades hacia abajo del eje *y*.**
3. **El vértice de la parábola de la función es V (–1, ________)**
4. **El eje de simetría es la línea paralela al eje y cuya ecuación es: ____________**

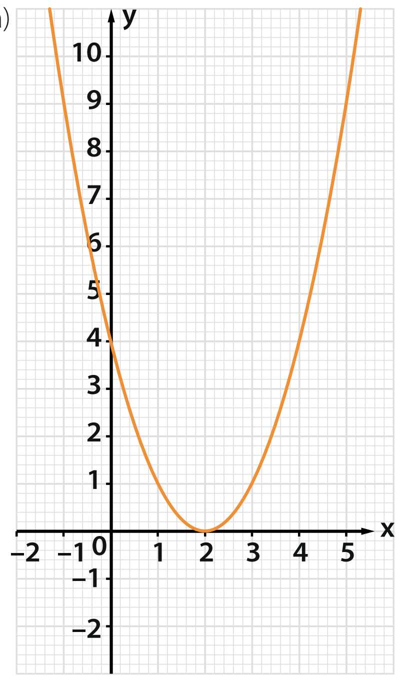
Actividad 15

1. **Complete la tabla escribiendo el vértice o la expresión algebraica de la función según corresponda en cada caso.**

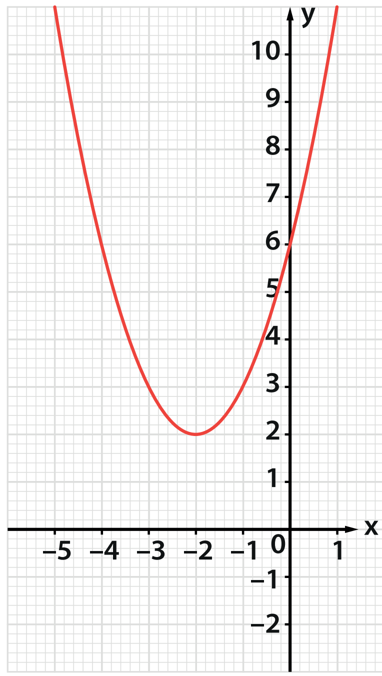
Expresión	Vértice
a) $y = (x – 4)^2 + 6$	V (______ , ______)
b) $y =$	V(–2 , 5)
c) $y = (x – 7)^2 – 9$	V (______ , ______)

2 **Escriba la expresión algebraica correspondiente a cada parábola.**

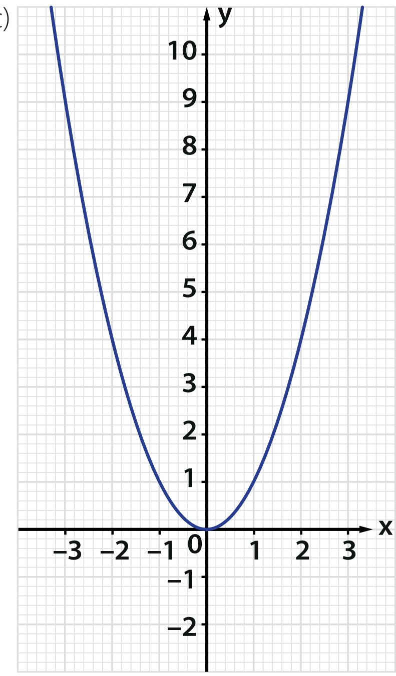
a)



b)

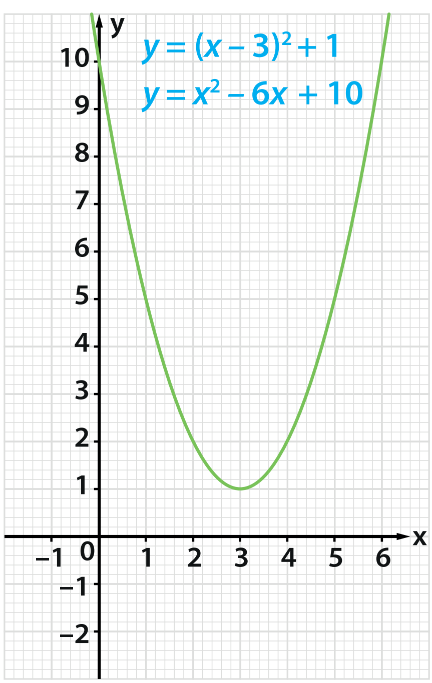


c)



Actividad 16

1 **Observe la gráfica y las expresiones algebraicas de la función que representan. Luego, lea la información del Cuadro de diálogo.** 4



4

Cuando una función cuadrática se representa como $y = (x - d)^2 + e$ se dice que está expresada en **forma del vértice**.

También esta función cuadrática se representa como $y = x^2 + bx - c$ y se dice que está expresada en **forma general**.

- ¿Por qué una de las expresiones que representa las funciones cuadráticas recibe el nombre de forma del vértice?

2 **Escriba las siguientes expresiones de forma del vértice a forma general.**

Para escribir la expresión de **forma del vértice** a la **forma general** de una función cuadrática, se debe resolver el paréntesis y simplificar términos.

a) $y = (x - 3)^2 + 1$

b) $y = (x + 4)^2 - 5$

c) $y = -(x + 5)^2 + 7$

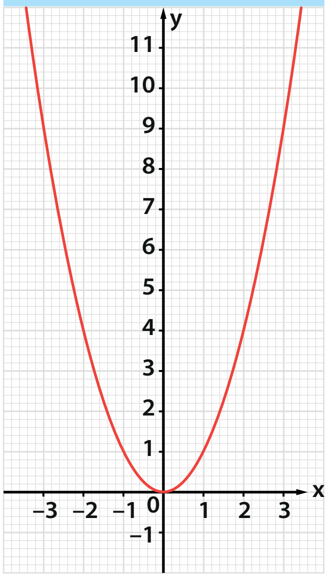
Clase 5

Tema: Funciones cuadráticas de la forma $a\,(x + d)^2 + e$

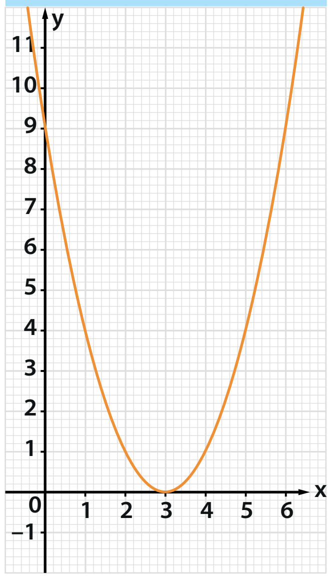
Actividad 17

Escriba la expresión algebraica de la función que representa cada transformación de la gráfica de una función cuadrática.

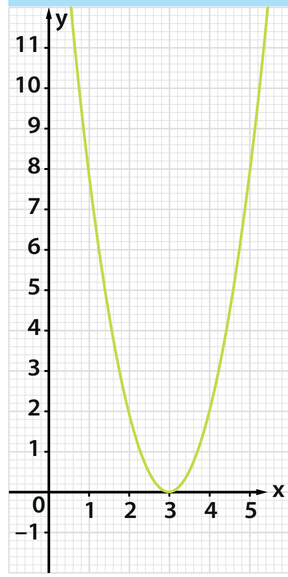
Parábola normal



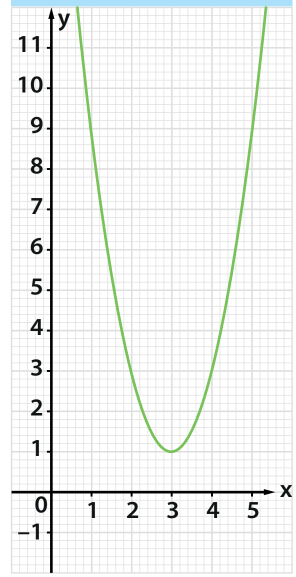
Se traslada 3 unidades hacia derecha



Tiene un factor de 2



Se traslada 1 unidad hacia arriba



1. $y =$ ____________
2. $y =$ ____________
3. $y =$ ____________
4. $y =$ ____________

Actividad 18

1. **Lea la información.**

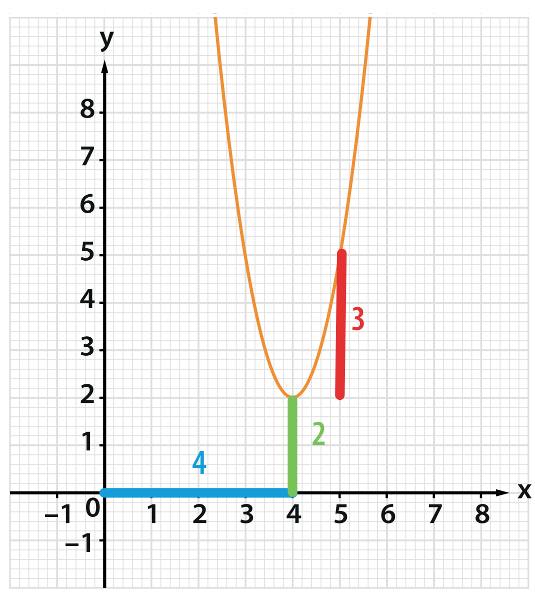
En las parábolas cuya expresión algebraica tiene la forma $y = a\,(x - d)^2 + e$, se pueden identificar características como:

$$y = 3(x - 4)^2 + 2$$

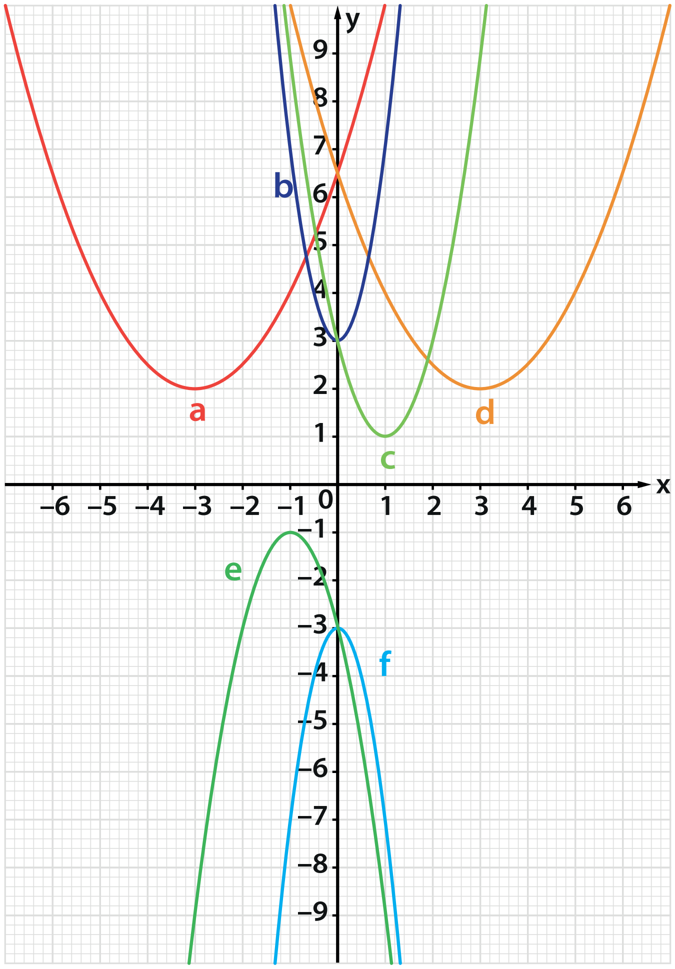
La parábola se contrae, por el factor 3.

La parábola se traslada 4 unidades hacia la derecha del eje *x*.

La parábola se traslada 2 unidades hacia arriba del eje *y*.



2 **Escriba la expresión algebraica de la función y su correspondiente vértice en cada una de las parábolas.**



a) V (_____ , _____) y = _________________ b) V (_____ , _____) y = _________________

c) V (_____ , _____) y = _________________ d) V (_____ , _____) y = _________________

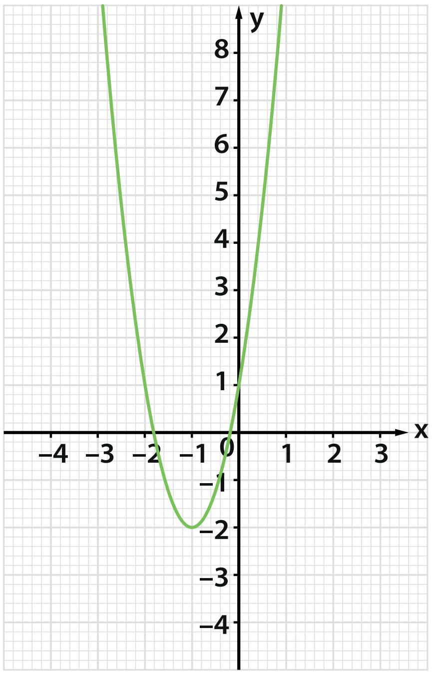
e) V (_____ , _____) y = _________________ f) V (_____ , _____) y = _________________

Actividad 19

1 **Observe la gráfica y las expresiones algebraicas de la función que la representan.**

$y = 3x^2 + 6x + 1$ $y = 3(x + 1)^2 - 2$

Para escribir la expresión de la parábola de la forma general a la forma del vértice, se tiene en cuenta lo siguiente:



Forma general: $y = ax^2 + bx + c$

Fórmula del vértice: $x_{vértice} = -\dfrac{b}{2a}$

Por ejemplo para la función $y = 3x^2 + 6x + 1$ se tiene que:

$x_{vértice} = -\dfrac{6}{2 \cdot 3}$; $x_{vértice} = -1$	Usando la formula $x_{vértice} = -\dfrac{b}{2a}$
$y = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 1 = -2$	Reemplazando x en $y = 3x^2 + 6x + 1$
V $(-1, -2)$	Coordenada del vértice
$y = 3(x + 1)^2 - 2$	Se tiene en cuenta que a es 3.

2 **Escriba de la forma general a la forma del vértice las siguientes funciones cuadráticas.**

a) $y = 4x^2 - 16x + 2$

b) $y = \dfrac{3}{2}x^2 + 3x - 6$

c) $y = 0{,}3x^2 + 0{,}2x - 1{,}5$

Clase 6

Tema: Ecuación cuadrática

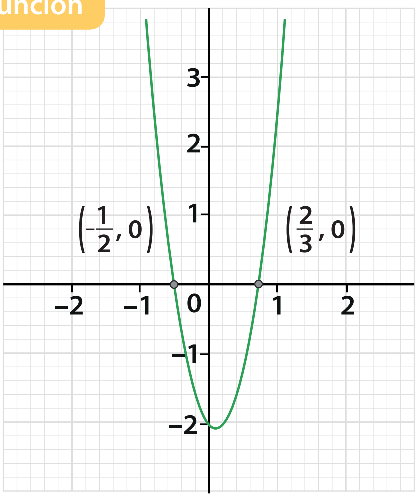
Actividad 20

1 Lea la siguiente información.

Para cada función cuadrática es posible asociar una ecuación cuadrática. Por ejemplo, para la función cuadrática (expresada en forma general) $y = 6x^2 - x - 2$ es posible asociar la ecuación cuadrática $y = 6x^2 - x - 2 = 0$. Los puntos de corte con el eje x de la función $y = 6x^2 - x - 2$ son los ceros (raíces o soluciones) de la ecuación.

$$y = 6x^2 - x - 2 = 0$$

Función



Ecuación

Para $6x^2 - x - 2 = 0$ se tiene que si $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{2}{3}$ la ecuación se verifica.

- Para $x = -\frac{1}{2}$ se tiene que:

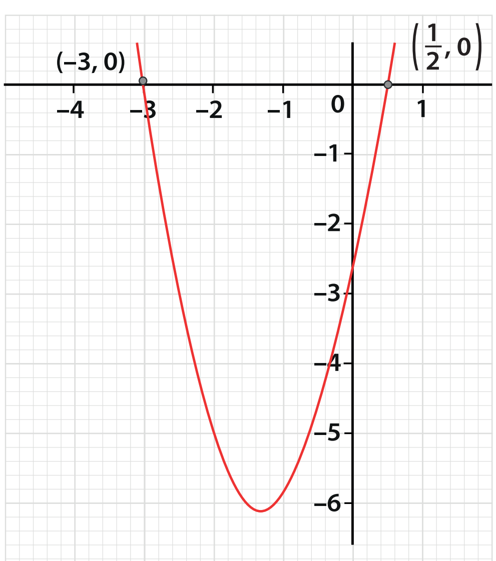
  $$6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$$

- Para $x = \frac{2}{3}$ se tiene que:

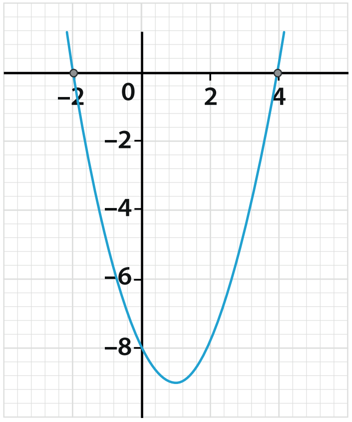
  $$6\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right) - 2 = 0$$

2 Observe los puntos de corte con el eje x de cada parábola. Luego, reemplace los valores en la ecuación cuadrática asociada a la función y verifique que estos valores son solución de dicha ecuación.

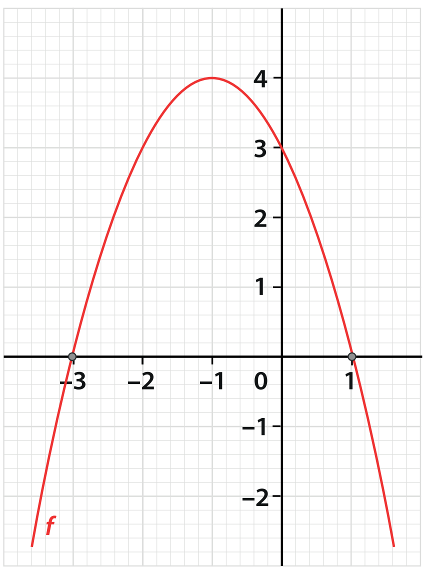
a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$



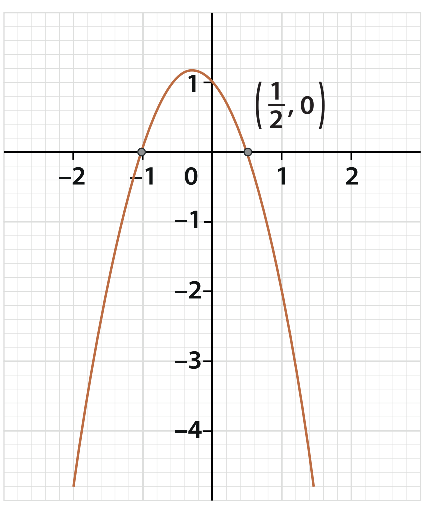
b) $f(x) = x^2 - 2x - 8$



c) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$



d) $f(x) = -2x^2 - x + 1$



Actividad 21

Escriba la ecuación cuadrática asociada a cada función cuadrática. Elabore la gráfica de la parábola y determine los puntos de corte con el eje *x*. Reemplace estos puntos en la ecuación y verifique que son soluciones (raíces o ceros).

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

2. $f(x) = 2(x + 3)^2 - 2$

Clase 7 Esta clase tiene video

Tema: Solución de ecuaciones cuadráticas

Actividad 22

1 **Observe el proceso realizado para encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática $3x^2 = 0$.**

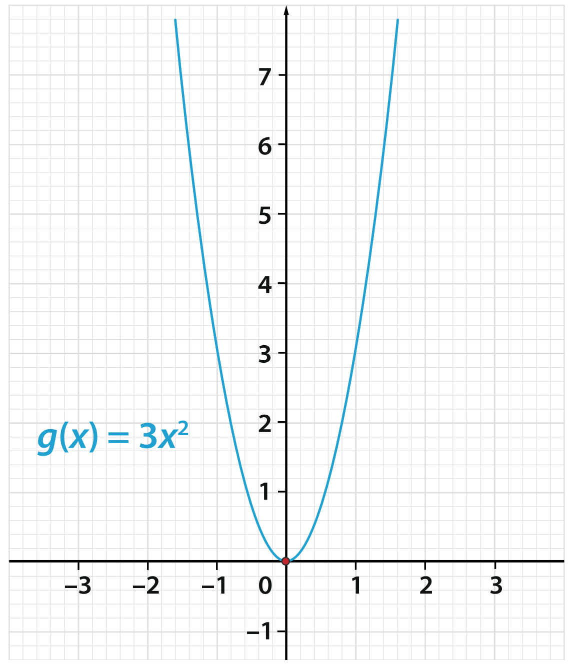
$$3x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

La única solución de esta ecuación es $x = 0$.

Gráficamente el punto (0, 0) es el único punto de corte de la parábola con el eje x.



2 **Solucione las siguientes ecuaciones. Elabore la gráfica de la parábola asociada a la ecuación.**

a) $19x^2 = 0$

b) $24x^2 = 0$

Actividad 23

1 **Observe el paso a paso de la solución de la ecuación cuadrática $3x^2 - 12 = 0$ y escriba la justificación de cada caso.**

$3x^2 - 12 = 0$ ______________________________

$3x^2 = 12$ ______________________________

$x^2 = \frac{12}{3}$ ______________________________

$x = \pm\sqrt{4}$ ______________________________

Por lo tanto, la ecuación $3x^2 - 12 = 0$ tiene dos soluciones $x_1 =$ ________ y $x_2 =$ ________.

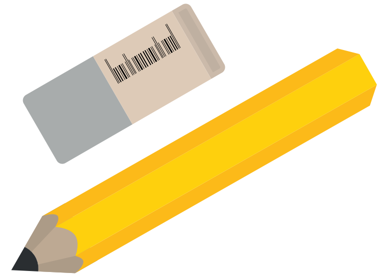
Explique porqué esta ecuación tiene dos soluciones .

2 **Solucione las siguientes ecuaciones cuadráticas. Elabore la gráfica de la parábola asociada a la ecuación.**

a) $5x^2 - 20 = 0$

b) $-3x^2 + 9 = 0$

Clase 8



Actividad 24

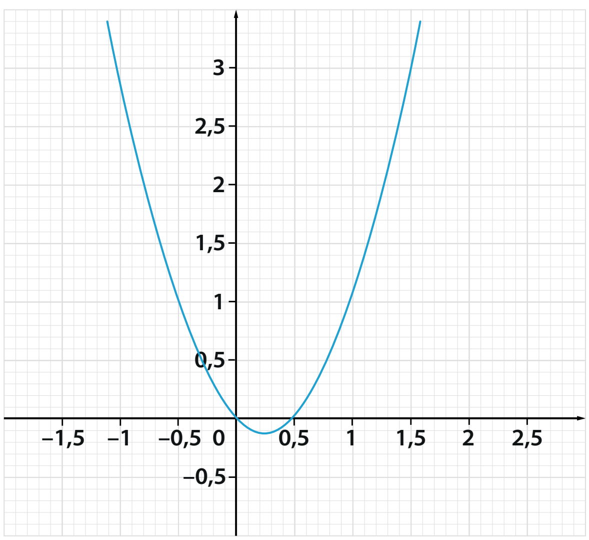
Usando el factor común solucione las siguientes ecuaciones cuadráticas. Escriba las coordenadas del vértice de la parábola asociada a cada ecuación.

1. $4x^2 - 8x = 0$
2. $-6x^2 - 24x = 0$
3. $-5x^2 + 10x = 0$
4. $\frac{1}{3}x^2 + x = 0$

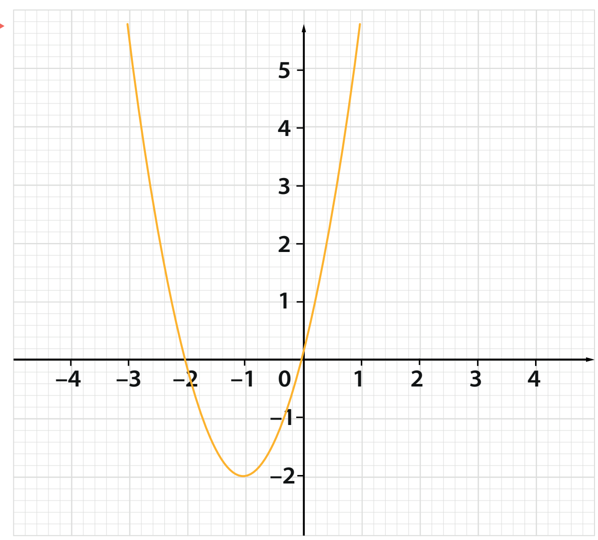
Actividad 25

Escriba la ecuación cuadrática asociada a la función cuadrática dada en la gráfica.

1.



2.



Actividad 26

Considere la ecuación $(x + 8)(x - 2) = 0$, esta representa una ecuación cuadrática.

1 **Desarrolle el producto para establecer la ecuación general.**

2 **Realice la gráfica de la función cuadrática asociada la ecuación anterior.**

3 **¿Cuáles son los ceros, raíces o soluciones de la ecuación cuadrática?**

____

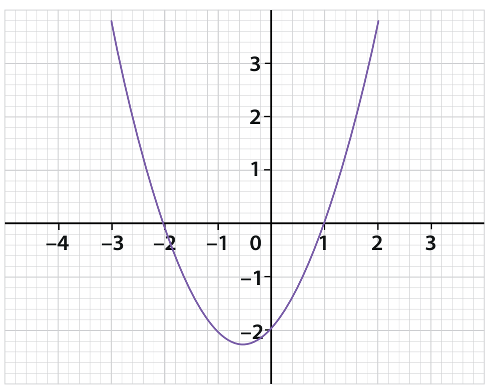
4 **¿Qué relación encuentra entre las soluciones encontradas para la ecuación cuadrática (escritas en el punto 3) y la expresión factorizada $(x + 8)(x - 2) = 0$?**

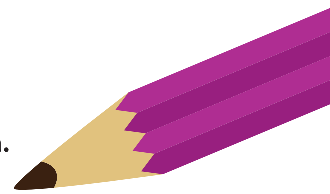
____

____

5 **¿Cuál es la ecuación asociada a la función cuadrática de la gráfica? Factorícela.**

$(x$ ________ $)(x$ ________ $) = 0$

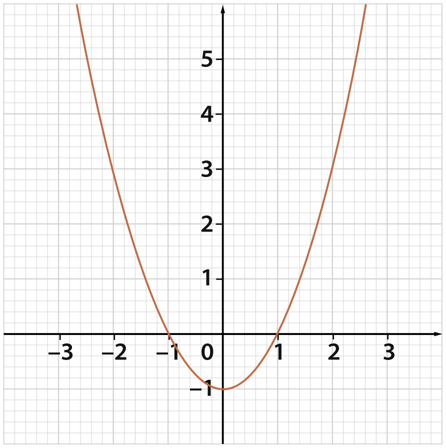




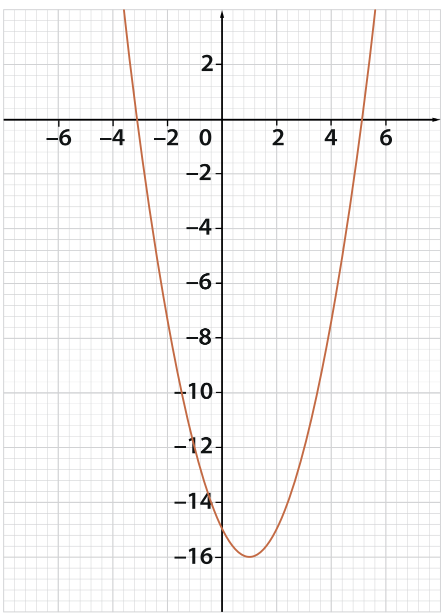
Actividad 27

Escriba, en forma factorizada, la ecuación cuadrática asociada a cada función cuadrática. Luego, escriba la ecuación en forma general.

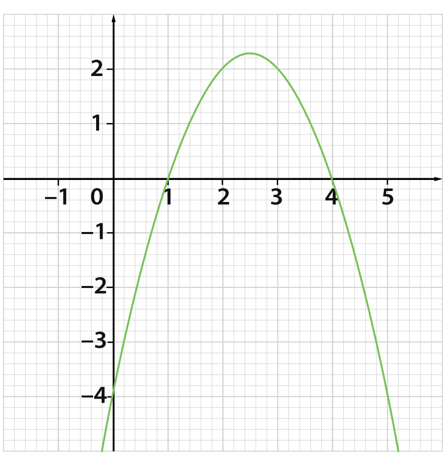
1



2



3



Clase 9

Actividad 28

1 Lea con atención.

Para resolver una ecuación cuadrática, cuando se puede, se factoriza el trinomio y se iguala cada factor a cero y en cada caso se halla una solución.

Resuelva la ecuación cuadrática $x^2 + 4x + 3 = 0$ usando factorización.

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$x^2 + 3x + x + 3 = 0$$
$$x(x + 3) + 1(x + 3) = 0$$
$$(x + 3)(x + 1) = 0$$
$$x + 3 = 0 \longrightarrow x_1 = -3$$
$$x + 1 = 0 \longrightarrow x_2 = -1$$

Estas soluciones se pueden comprobar reemplazando los valores en la ecuación y verificando que se cumple la igualdad.

2 Elabore la gráfica de la función asociada a la ecuación anterior.

3 Resuelva las siguientes ecuaciones, use la factorización.

a) $x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$

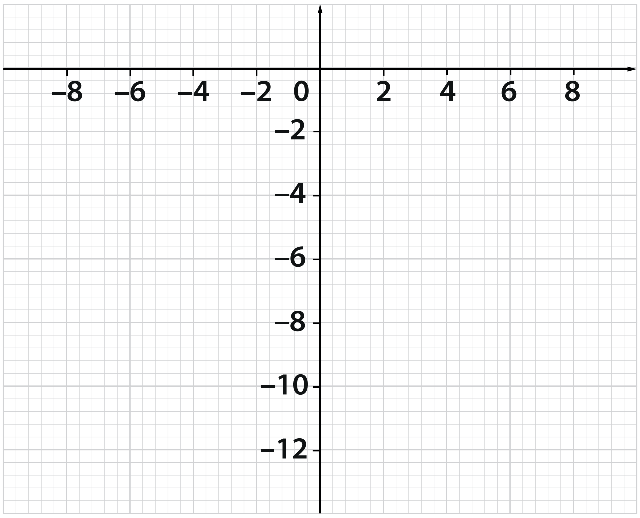
c) $4x^2 - 16x + 12 = 0$

d) $12x^2 + 25x + 12 = 0$

Actividad 29

Resuelva cada ecuación cuadrática, luego, halle el vértice de la parábola asociada a la ecuación y elabore la gráfica correspondiente a la función.

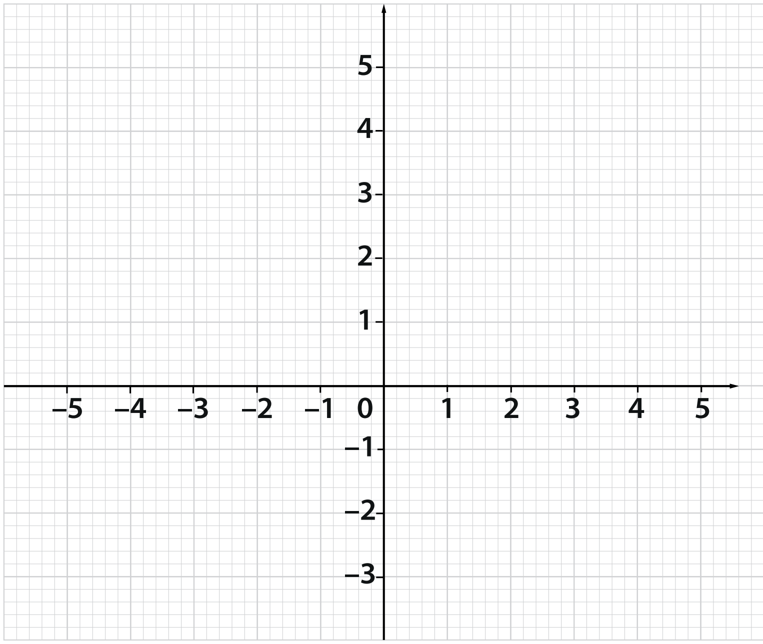
1 $x^2 - 9 = 0$



a) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola? ____________________

b) ¿Cuáles son las coordenadas del los puntos de corte de la parábola con el eje *x*? ____________________

2 $5x^2 - 4x - 1 = 0$



a) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola? ____________________

b) ¿Cuáles son las coordenadas del los puntos de corte de la parábola con el eje *x*? ____________________

Clase 10

Tema: Solución de problemas con ecuaciones de segundo grado

Actividad 30

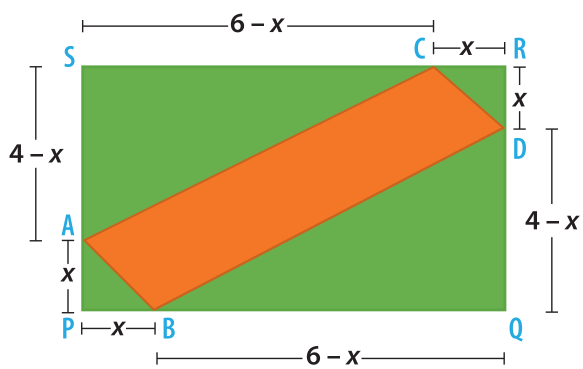
Resuelva las siguientes situaciones.

1 **El perímetro del rectángulo de la figura es 20 cm y su área es 24 cm^2. Determine las medidas del rectángulo.** 5

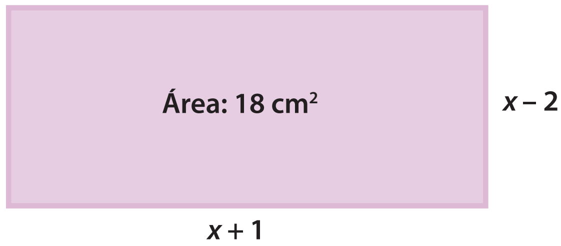
5 **Recuerde que…** el perímetro es la suma de la medida de los lados y el área del rectángulo de la figura está dada por $A = n \cdot x$

2 **La figura muestra el cuadrilátero *ABDC* inscrito en otro el cuadrilátero *PQRS* en el cual *PQ* = 6 cm y *SP* = 4 cm además los segmentos *AP*, *PB*, *DR* y *RC* son congruentes.**

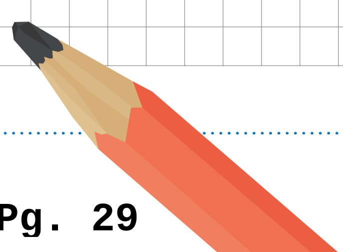
¿Cuál es el área máxima que puede tener el cuadrilátero *ABCD*?



3 **El área del rectángulo de la figura es 18 cm². Determine las medidas de la base y la altura dada la información.**



4 **Si se eleva al cuadrado el número anterior al doble de un número entero *x*, el resultado es equivalente al número entero *x* elevado al cuadrado más 5 unidades.**
¿Qué número entero cumple con estas condiciones?



Clase 11

Tema: Fórmula general para solucionar ecuaciones cuadráticas

Actividad 31

1 **Lea la siguiente información.**

La **deducción de una fórmula práctica** nos permite solucionar cualquier tipo de ecuación cuadrática. Para deducir la fórmula utilizaremos el método de completar cuadrados.

Deducción de la fórmula general:

- Se parte de la ecuación cuadrática: → $ax^2 + bx + c = 0$
- Se dividen ambos lados de la igualdad entre a → $\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$
- Se distribuye y se simplifica → $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
- Se resta $\frac{c}{a}$ en ambos lados de la igualdad → $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
- Se suma $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, para completar el trinomio cuadrado perfecto → $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
- Se resuelve el cuadrado en el lado derecho de la igualdad → $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
- Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto y se realiza la diferencia en el lado derecho de la igualdad → $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
- Se saca la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad → $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
- Se despeja la variable x → $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Se reduce a común denominador obteniéndose → $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

A esta última expresión se le conoce con el nombre de fórmula cuadrática.

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Actividad 32

1 Lea el ejemplo de cómo aplicar la fórmula anterior en la solución de ecuaciones cuadráticas.

Resolver la ecuación $3x^2 - 10x + 3 = 0$ utilizando la fórmula cuadrática.

Primero. Se identifican los coeficientes de la ecuación

$$a = 3,\ b = -10,\ c = 3$$

Segundo. Teniendo en cuenta la fórmula general $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se reemplazan los coeficientes anteriores

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-(-10)^2 - 4(3)(3)}}{2(3)}$$

A estas soluciones también se les conoce como raíces o ceros de la ecuación.

Tercero. Se efectúan las operaciones indicadas

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

Se tiene en cuenta que se generan dos soluciones

$$x_1 = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \qquad x_2 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En conclusión las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{1}{3}$.

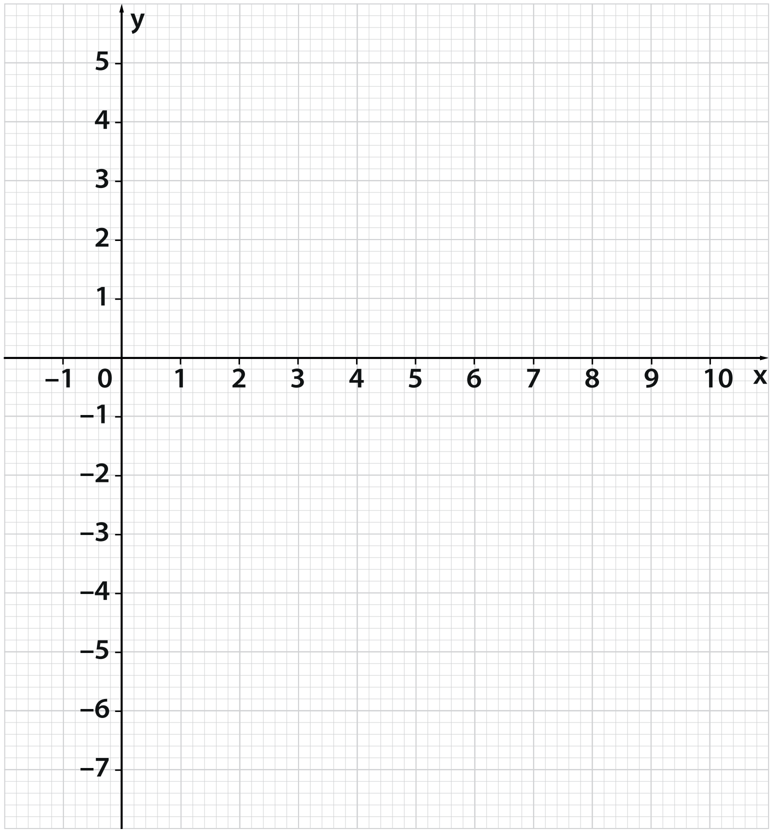
2 Elabore la gráfica de la parábola $y = 3x^2 - 10x + 3$ y verifique que la siguiente afirmación sea correcta.

Las soluciones reales 3 y $\frac{1}{3}$ de la ecuación

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

corresponden con los puntos de corte con el eje x de la gráfica de la función

$$f(x) = 3x^2 - 10x + 3$$



Actividad 33

Resuelva las ecuaciones dadas aplicando la fórmula cuadrática.

1. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

2. $x^2 + 2x + 1 = 0$

3. $4x^2 - 8x + 1 = 0$

Clase 12

Actividad 34

Lea la siguiente información. Luego, elabore la gráfica de las parábolas.

En la parábola que describe $ax^2 + bx + c$ se tiene que:

- Las coordenadas del vértice están dadas por: $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- El eje de simetría es la recta $x^2 - \frac{b}{2a}$
- Los puntos de corte con el eje x están dados por la solución de $ax^2 + bx + c = 0$.
- El punto de corte con el eje y es $(0, c)$.

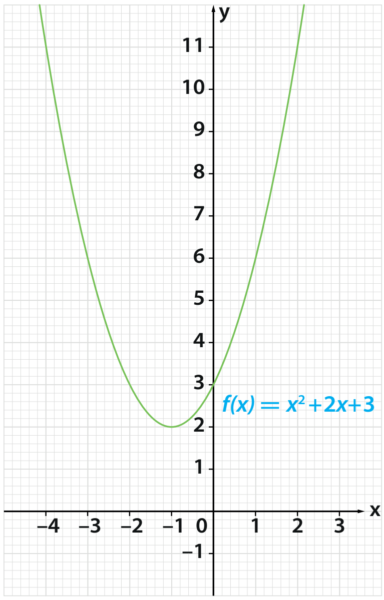
1 $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

2 $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

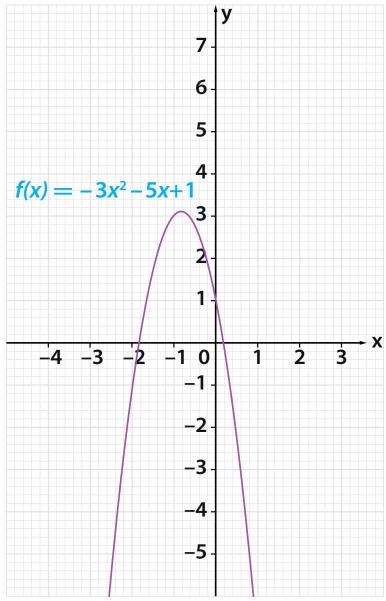
Actividad 35

1 **Observe las gráficas y determine cuántos puntos de corte con el eje x tienen las parábolas**

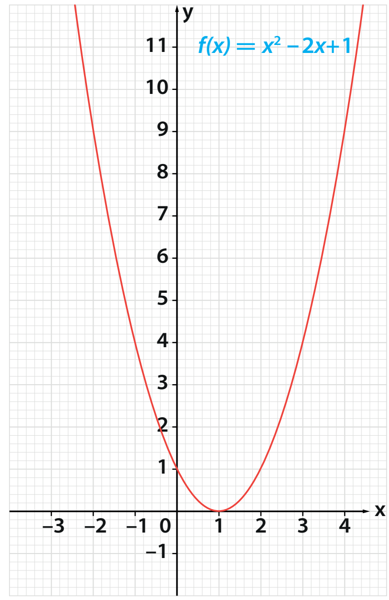
Parábola 1



Parábola 2



Parábola 3



2 **En la fórmula $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ la expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática y se representa con la letra griega Δ (delta). Calcule el discriminante de las ecuaciones cuadráticas asociadas a las parábolas del numeral anterior.**

a) $x^2 + 2x + 3 = 0$ b) $-3x^2 - 5x + 1 = 0$ c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Si se conoce el discriminante de una ecuación cuadrática y se grafican las funciones asociadas a cada ecuación cuadrática, se pueden identificar características particulares de dichas parábolas y de la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática asociada.

Si $b^2 - 4ac = 0$ la parábola corta el eje x en un único punto (única raíz real doble).

Si $b^2 - 4ac < 0$ la parábola no corta el eje x (raíces complejas).

Si $b^2 - 4ac > 0$ la parábola corta el eje x en dos puntos (dos raíces reales).

3 Teniendo en cuenta las gráficas y las raíces, complete la tabla siguiente.

Función cuadrática asociada a cada parábola	Ecuación cuadrática asociada a cada función cuadrática	Discriminante (Δ)	Raíces reales	Raíces complejas

Actividad 36

Halle en cada caso el discriminante de la ecuación cuadrática asociada a cada función. Luego, determine cuántos puntos de corte con el eje *x* tiene dicha función y de qué tipo son las raíces de la cuadrática.

1. $f(x) = 10x^2 - 9x - 6$

2. $f(x) = -9x^2 + 3x + 10$

3. $f(x) = x^2 + 14x + 49$

4. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

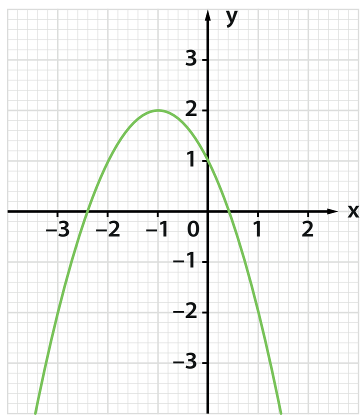
Clase 13

Tema: Problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas

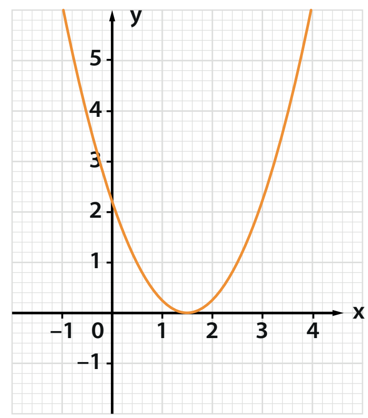
Actividad 37

Las gráficas dadas a continuación corresponden a funciones cuadráticas. Determine la naturaleza de las raíces de cada función.

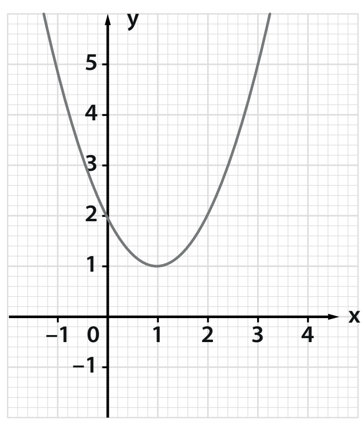
1



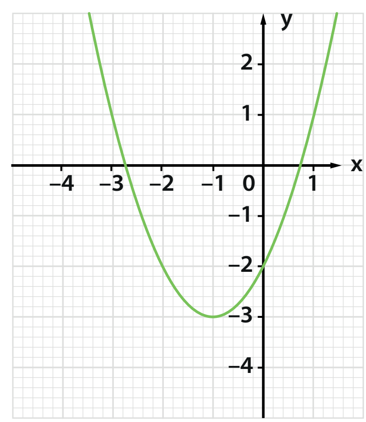
2



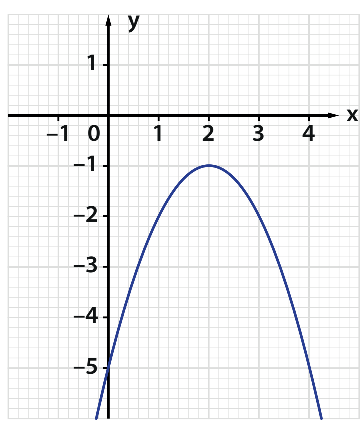
3



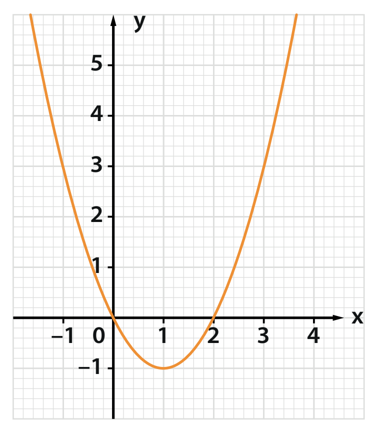
4



5



6



Actividad 38

Las ecuaciones cuadráticas se aplican en fórmulas físicas relacionadas con el movimiento.

1 **Lea y analice el siguiente ejemplo en el que un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba con un velocidad de 39,2 metros por segundo y sobre el cual sólo actúa la fuerza de la gravedad. La fórmula que permite determinar la altura *h*, en metros, del proyectil sobre el suelo después de *t* segundos es: $h = -4{,}9t^2 + 30{,}8t$.**

a) Para despejar *t* de la ecuación dada se debe hacer el siguiente proceso:

$h = -4{,}9t^2 + 39{,}2t$

$-4{,}9t^2 + 39{,}2t - h = 0$ → Se iguala a 0 y se plantea la ecuación cuadrática

a = 4,9 b = 39,2 c = –*h* → Se identifican los coeficientes

$$t = \frac{-39{,}2 \pm \sqrt{(39{,}2)^2 - 4\,(-4{,}9)(h)}}{2(-4{,}9)}$$ → Se aplica la fórmula general

$$t = \frac{-39{,}2 \pm \sqrt{1536{,}64 - 19{,}6h}}{-9{,}8}$$ → Se efectúan las operaciones indicadas

$$t_1 = \frac{-39{,}2 + \sqrt{1536{,}64 - 19{,}6h}}{-9{,}8} \qquad t_2 = \frac{39{,}2 - \sqrt{1536{,}64 - 19{,}6h}}{9{,}8}$$

En este caso las soluciones se interpretan como "tiempos" dependiendo de la altura *h* dada en cada expresión.

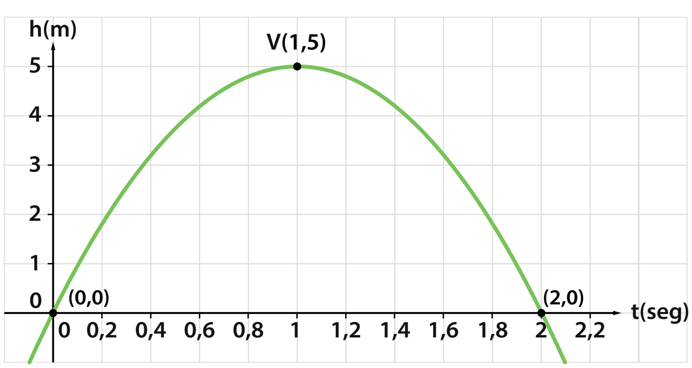
b) Para saber en qué instante el proyectil toca el suelo se debe tener en cuenta que es el momento en el que la altura es 0 ($h = 0$). Así que:

$$t_1 = \frac{39{,}2 - \sqrt{1536{,}64 - 19{,}6\,(0)}}{9{,}8} \qquad t_2 = \frac{39{,}2 + \sqrt{1536{,}64 - 19{,}6\,(0)}}{9{,}8}$$

Después de efectuar las operaciones se concluye que hay dos instantes:

$$t_1 = 0\ seg \ \ \text{y} \ \ t_2 = 8\ seg$$

2 **Julio Mosquera lanza un balón al aire con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. La altura del balón en cualquier instante *t*, está dada por la fórmula: $h = 10t - 5t^2$. Con base en la gráfica dada de la función cuadrática anterior responda las siguientes preguntas:**



a) ¿En qué instante logra el balón su altura máxima? ______________________

b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el balón? ______________________

c) Después de lanzado el balón, ¿cuánto tiempo tarda en tocar el suelo?

____

3 **Un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba alcanza una altura *h* (en metros) dada por $h(t) = -4{,}9\,t^2 + 19{,}6t$, donde *t* es el tiempo (en segundos) que tarda en alcanzar la altura.**

a) ¿Qué altura alcanza el objeto a los 3 segundos? ______________

b) ¿Cuánto tarda el objeto en volver a tocar el suelo? ______________

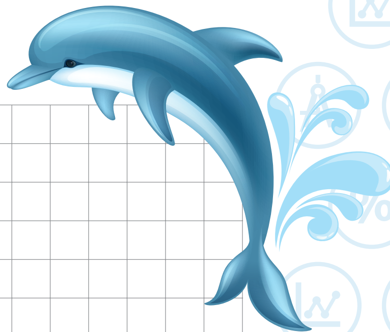
c) ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en alcanzar su altura máxima? ______________

d) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto? ______________

4 **Un delfín realiza un salto que describe una trayectoria parabólica; dicha trayectoria está dada por la expresión $f(t) = -t^2 + 6t$ (con *t* mayor o igual a 0 y menor o igual a 6). En esta expresión *t* representa el tiempo en segundos y $f(t)$ la altura en metros que alcanza el delfín en un instante dado.**

a) Grafique la trayectoria seguida por el delfín.

b) ¿A partir de qué instante el delfín comienza a descender? ______________



Clase 14

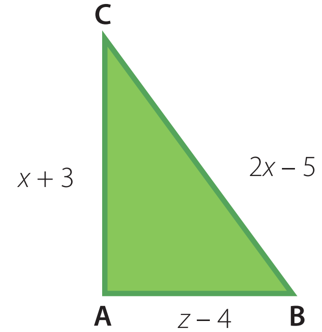
Actividad 39

En cada uno de los problemas enunciados a continuación plantee la ecuación cuadrática que permite solucionarlo y resuelva dicha ecuación aplicando la fórmula general.

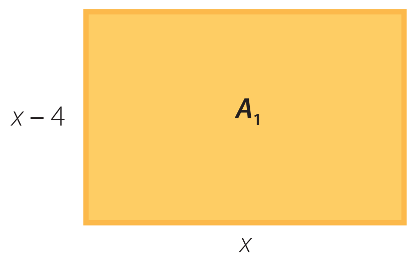
1 **El producto de dos números enteros positivos y consecutivos es 306. Calcule los números.**

2 **La suma de un número entero positivo y su recíproco es $\frac{26}{5}$. Calcule el número.**

3 **El triángulo ABC es rectángulo. Determine el valor de *x* y luego, calcule su perímetro y su área.**



4 **El largo de una sala excede en 4 metros su ancho. Si cada dimensión se aumenta en 4 metros el área inicial se triplica. Halle las dimensiones de la sala.**



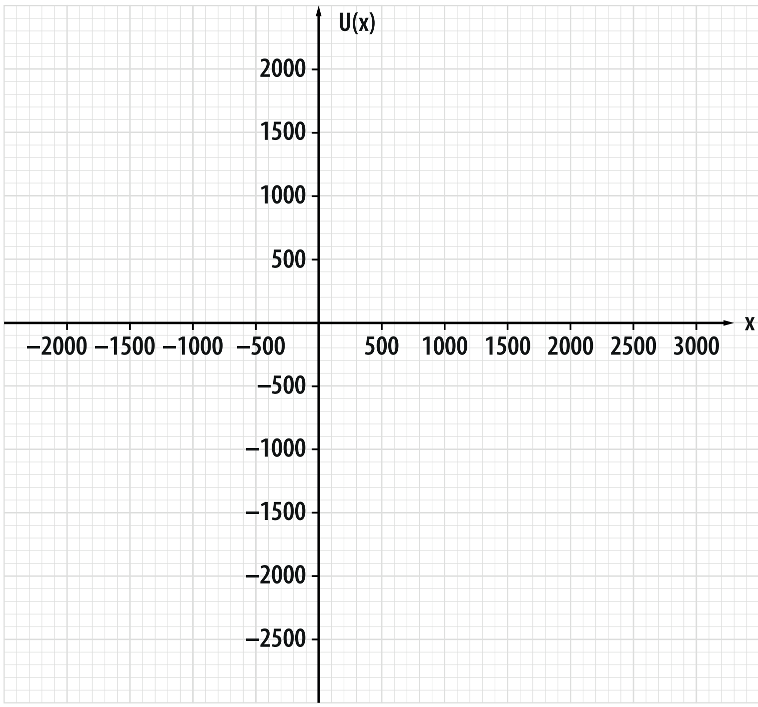
Clase 15

Actividad 40

1 **Al analizar los registros de ventas de un producto, se encuentra que si se venden *x* unidades de este producto en un día, la utilidad está dada por la siguiente función cuadrática:**

$$U(x) = -0{,}001x^2 + 3x - 1800$$

a) Realizar la gráfica que representa las utilidades en función del número de unidades vendidas en un día.



b) ¿Cuál es su utilidad máxima por día? ________________

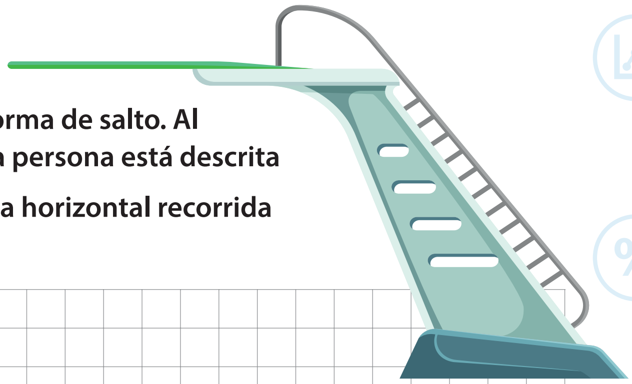
c) ¿Cuántas unidades del producto se debe vender para obtener una utilidad máxima? ________________

d) ¿Según el comportamiento de la función que se describe, siempre se tendrán ganancias?

____

e) ¿Si no siempre se tuvieran ganancias, a partir de cuántas unidades vendidas se estarán generando pérdidas?

____



2 **Una persona se ubica en la parte más alta de una plataforma de salto. Al lanzarse desde 20 m de altura, la trayectoria que sigue la persona está descrita por la función $f(x) = -\frac{11}{18}(x - 6)^2 + 22$. ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por la persona?**

Clase 16 Esta clase tiene video

Tema: Cuerpos geométricos

Actividad 41

1 **Lea la siguiente información**

Un **cuerpo geométrico** es una figura con tres dimensiones: alto, largo y ancho (o profundidad). Los cuerpos geométricos se pueden clasificar teniendo en cuenta la forma de sus caras en:

- **Poliedros:** cuerpos geométricos con caras únicamente planas.
- **Cuerpos redondos:** cuerpos geométricos con caras planas y caras curvas.

A continuación, puede observar un esquema con una clasificación de los poliedros. Es importante anotar que existen otras clasificaciones que en esta guía no se tendrán en cuenta.

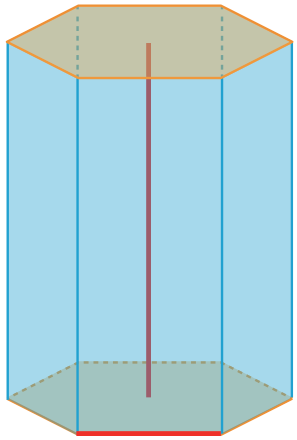
- **Poliedros**
  - **Regulares**
    - Tetraedro
    - Hexaedro
    - Octaedro
    - Dodecaedro
    - Icosaedro
  - **Irregulares**
    - **Prisma**
      - Recto
      - Oblicuo
      - Triangular
      - Cuadrangular
      - Pentagonal, Hexagonal, etc.
    - **Pirámide**
      - Recta
      - Inclinada
      - Triangular
      - Cuadrangular
      - Pentagonal, Hexagonal, etc.

2 **Reúnase con dos compañeros y escriban seis (6) nombres de algunos poliedros irregulares. Escriban cuáles son las características de los poliedros que escogieron.**

Por ejemplo, una pirámide inclinada es aquella en la que su vértice no coincide con la perpendicular que pasa por el centro de su base. Busque la imagen de una pirámide inclinada.

Actividad 42

1 **Identifique y señale en la imagen que se presenta a continuación las partes del prisma: aristas, vértices, bases, caras laterales y altura.** **6**



6

Un **prisma** es un poliedro que cumple las siguientes condiciones:

1. Tiene un par de caras congruentes sobre planos paralelos (bases).
2. Todas las demás caras son paralelogramos.

- ¿Un cubo es un prisma?

____

____

2 **Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta el prisma anterior.**

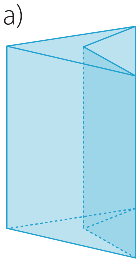
a) ¿Cuántas caras tiene el prisma de la figura? ______________

b) ¿Cuántos vértices tiene? ______________ ¿Cuántas aristas? ______________

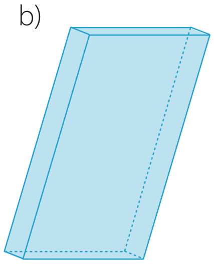
c) ¿Qué nombre recibe el prisma? ______________

3 **Identifique cuáles de los siguientes poliedros son prismas. Para el caso de los prismas, determine sus elementos y su nombre.**

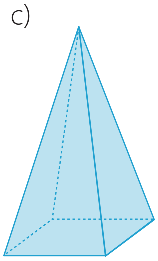
a)



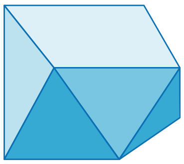
b)



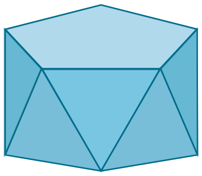
c)



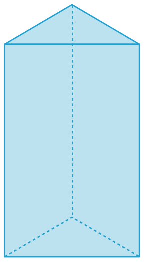
d)



e)

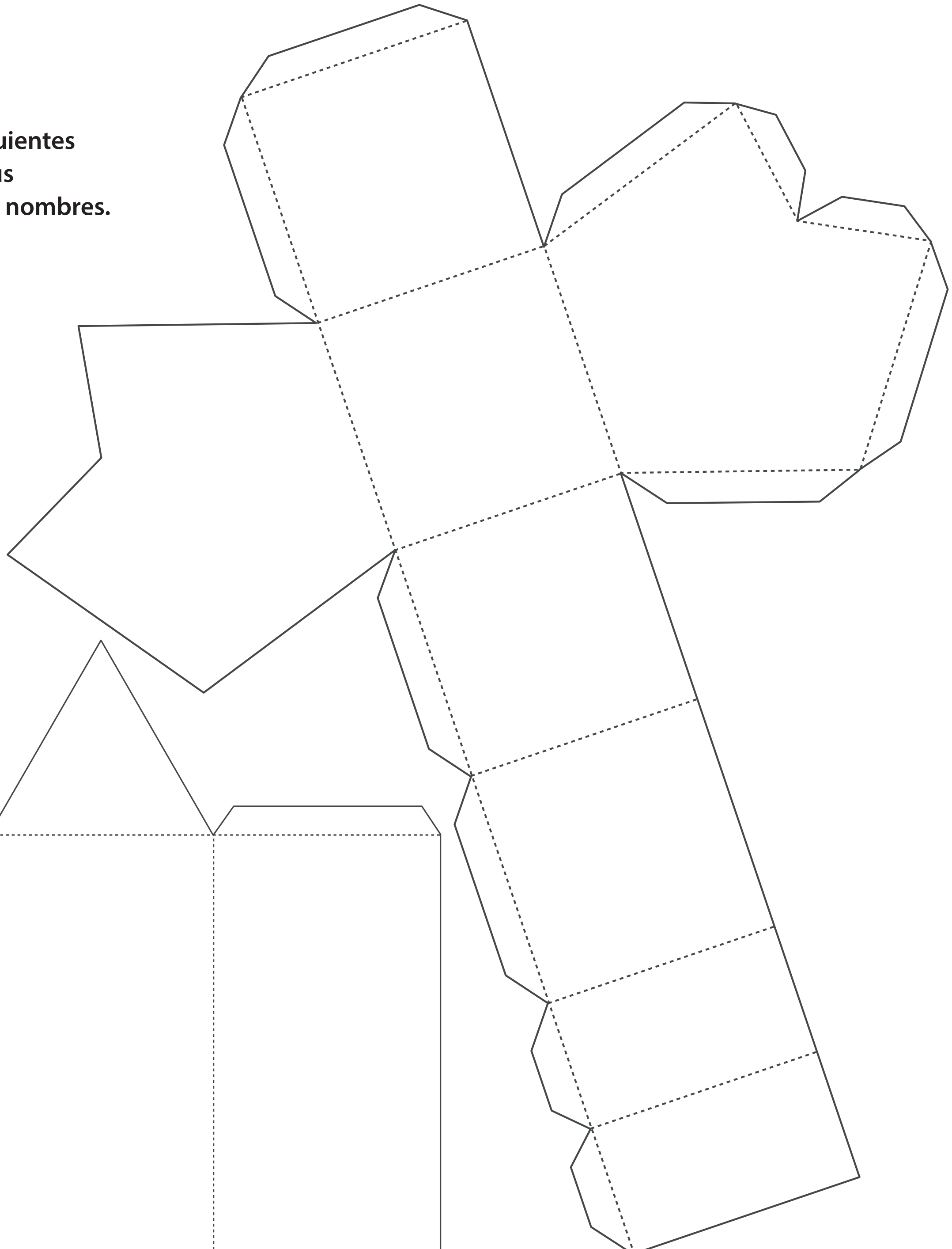


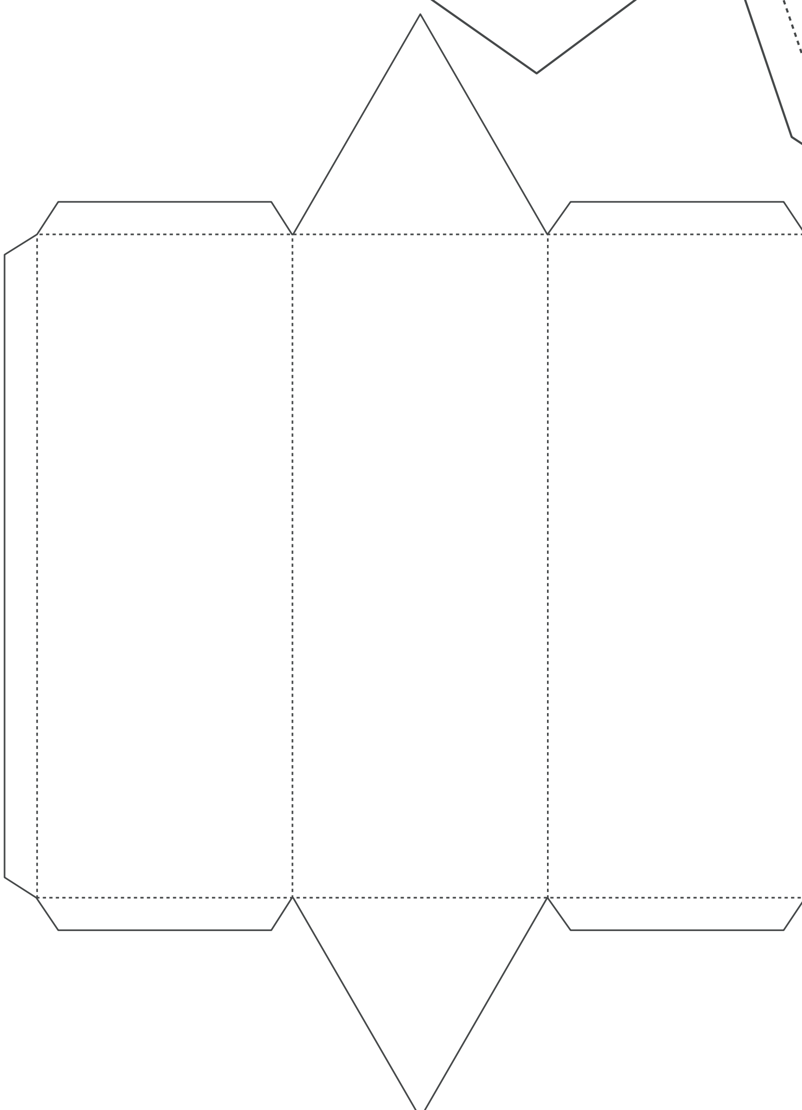
f)



Actividad 43

Recorte y arme los siguientes prismas. Identifique sus elementos y defina los nombres.





Clase 17

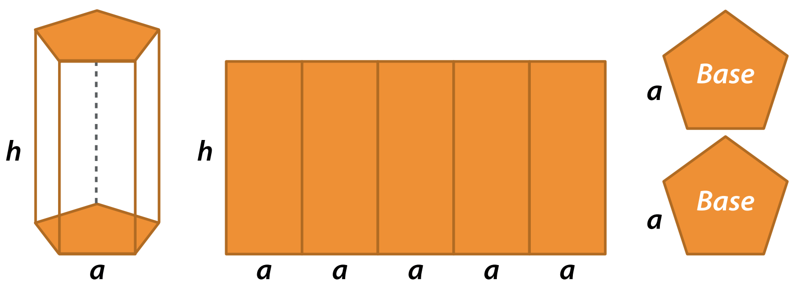
Tema: Área del prisma

Actividad 44

Recuerde que el área de un polígono regular está dada por

$$\text{Área} = \frac{\textit{perímetro} \times \textit{apotema}}{2}$$

1 Es posible determinar el valor del área total de un prisma regular calculando el área de cada una de las formas planas que lo forman (caras laterales y bases). Observe la imagen.



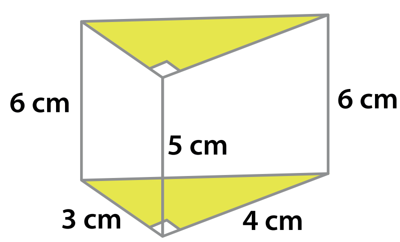
Área es 5ha

2 Escriba cómo puede hallar el área del prisma de la imagen anterior.

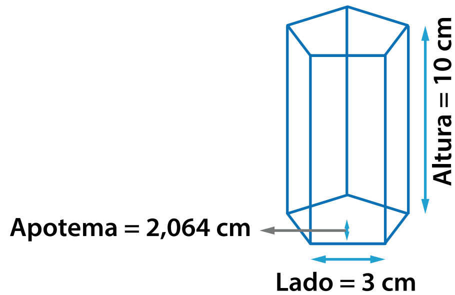
3 Escriba una conclusión que le permita hallar el área de cualquier prisma.

4 Halle el área de los siguientes prismas

a)



b)



Actividad 45

Resuelva las siguientes situaciones.

1. **La superficie de un prisma de base cuadrada es 360 cm^2. Además se sabe que la longitud de la altura de dicho prisma es el doble de la longitud del lado del cuadrado de la base. ¿Qué longitud tiene cada una de las aristas del prisma?**

2. **El panadero del barrio va a hacer varias tortas para la celebración del día de la madre. Para ello, va a utilizar moldes con forma de prismas cuadrados de 30 cm de lado y 6 centímetros de profundidad. Sabe que para que no se peguen las tortas, se debe cubrir el interior del molde con un papel especial. ¿Cuántos centímetros cuadrados de este papel, mínimo, va a necesitar para cada molde?**

3. **Una caja de cartón tiene forma de prisma hexagonal regular con altura 15 cm y longitud del lado del hexágono de 4 cm.**

   a) ¿Qué área tendrá esta caja? ______________________

   b) Si para ensamblarlo se adicionan dos pestañas a dos de las caras laterales y dos pestañas (una a cada base), determine una cantidad aproximada de material que se necesitará ahora para armar el prisma.

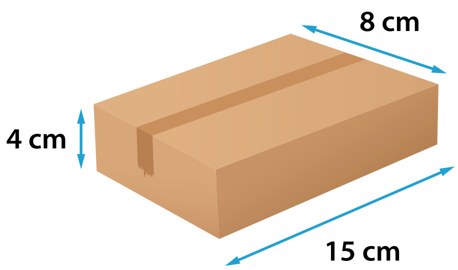
Clase 18

Tema: Volumen del prisma

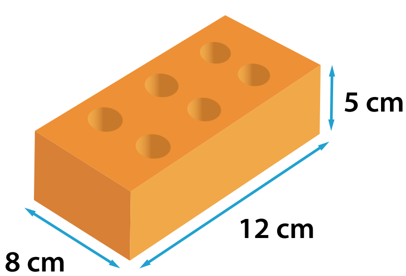
Actividad 46

Halle el volumen de los siguientes prismas.

1. Una caja de cartón.

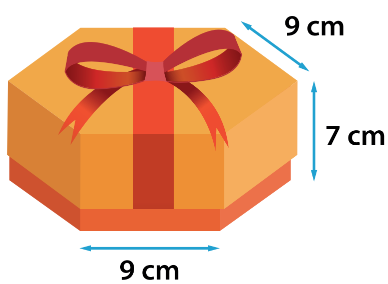


2. Un ladrillo de construcción.



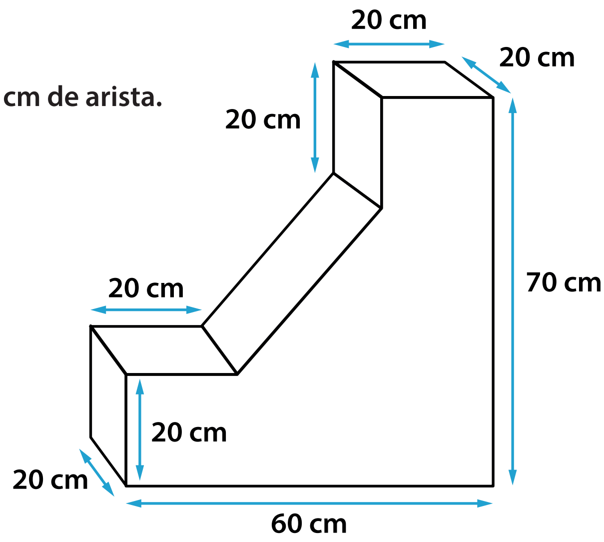
3. Un empaque de dulces.

4. Una caja de regalo.



Actividad 47

Daniel construyó el siguiente modelo usando cubos de 2,5 cm de arista.



1 **¿La figura es un prisma? Justifique su respuesta.**

2 **¿Qué volumen tiene la figura?**

3 **¿Cuántos cubos se usaron para construirla?**

4 **La tía de Daniel, una mujer muy creativa, hizo una caja con la forma del modelo. Se sabe que sólo cortó tres trozos de cartón y los pegó para formar la caja.**

a) Dibuje los tres trozos y escriba sus respectivas medidas.

b) ¿Cuánto cartón gastó en la caja?

Clase 19 Esta clase tiene video

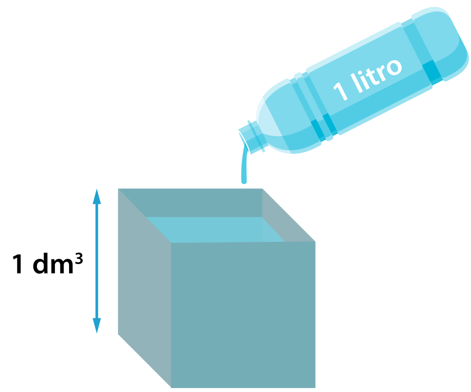
Tema: Volumen y capacidad del prisma

Actividad 48

1 **Las medidas de capacidad y de volumen están relacionadas por la siguiente expresión:**

$$1 \text{ litro} = 1\, dm^3$$

Es decir, un cuerpo de $1\, dm^3$ de volumen puede albergar un litro de agua.



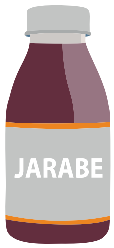
En muchos recipientes suelen escribirse las medidas de capacidad en mililitros, así $1\, l = 1000\, ml$.

2 **Investigue y escriba la medida en mililitros de los siguientes productos. Compare las respuestas con varios de sus compañeros.**

a) Bebida gaseosa en botella.

b) Jugo en caja

c) Medicamento para la fiebre



d) Leche

3 **Responda**

a) ¿Cuántos mililitros caben en un recipiente de $0{,}5\, dm^3$?

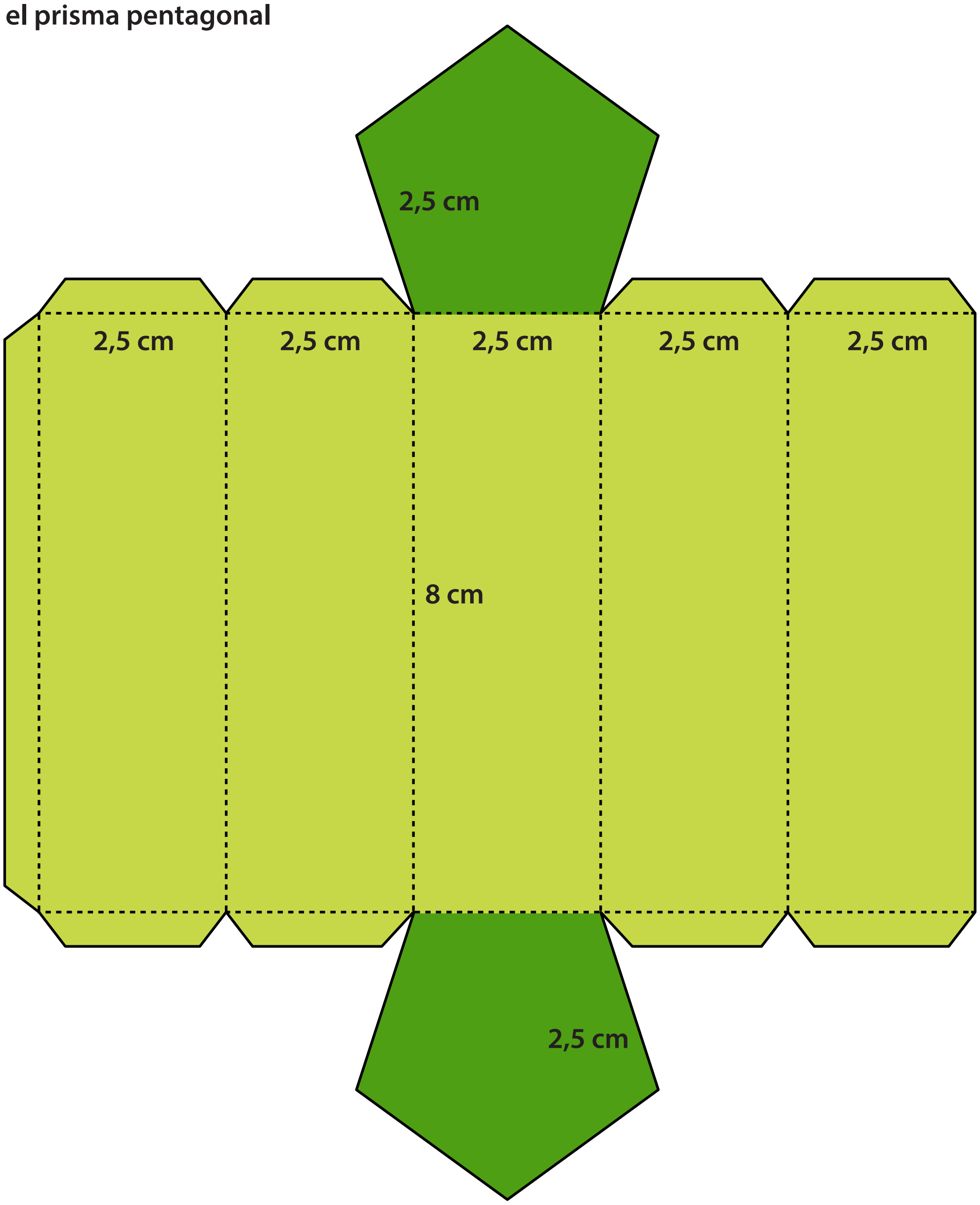
b) ¿Cuántos decímetros cúbicos de volumen debe tener un depósito que pueda contener 1.000 litros de agua?

c) ¿Qué volumen ocupa una piscina con forma de prisma rectangular de $12m \times 6m \times 1{,}5\ m$? ¿Cuánta agua se necesita para llenarla?

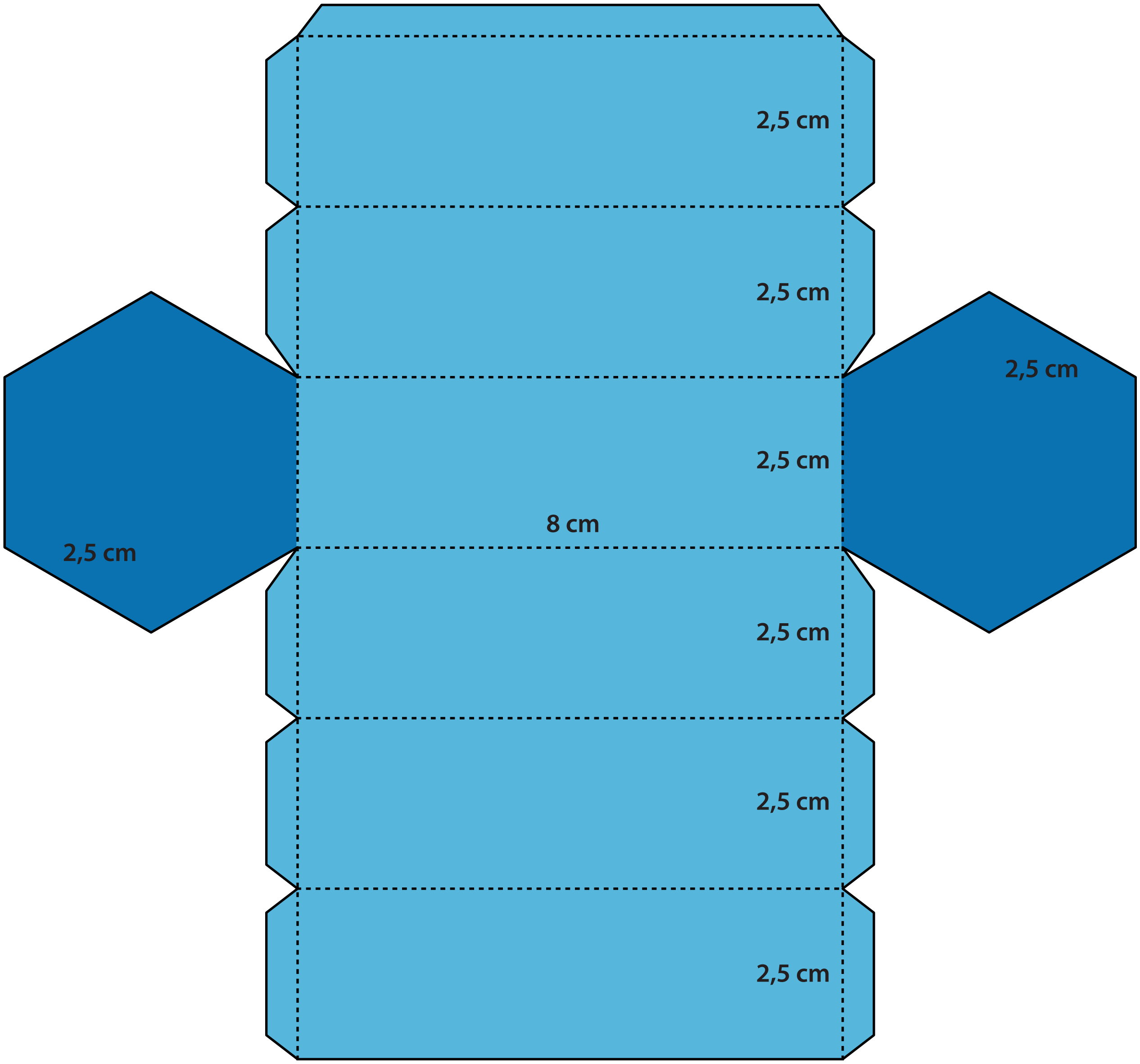
Actividad 49

Utilice los materiales que trajo a la clase para replicar los siguientes dos prismas y luego constrúyalos. Preste atención en que las medidas sean exactamente las dadas en las imágenes.

1 Forme el prisma pentagonal



2 Forme el prisma hexagonal.



3 Calcule el volumen de los dos prismas que construyó.

Clase 20

Actividad 50

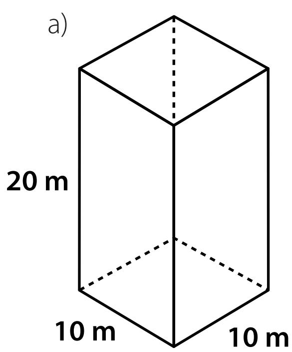
1. **Determine la capacidad (en mililitros) de los dos prismas que construyó en la clase anterior. Tenga en cuenta que 1*l* = 1000 *ml*.**

2. **Un vaso para café tiene capacidad de 5 onzas y una onza son aproximadamente 30 *ml*. ¿Es posible que alguno de los prismas construidos puedan contener un café de 5 onzas? Explique su respuesta.**

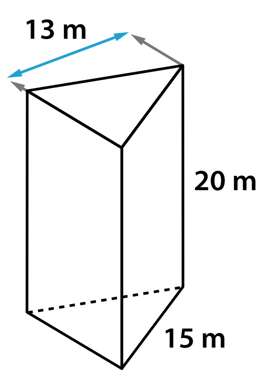
Actividad 51

1. **Sin calcular el volumen, determine qué capacidad (en mililitros) tiene cada uno de los siguientes recipientes.**

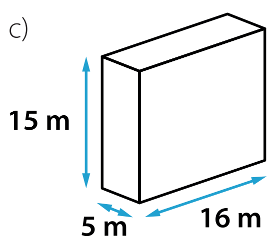
a)



b)

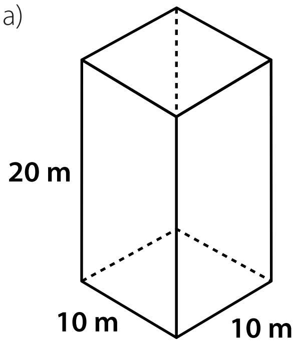


c)

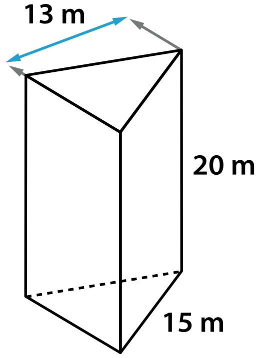


2 **Calcule el volumen de los recipientes de la actividad anterior usando la fórmula y determine su capacidad.**

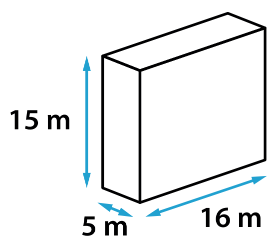
a)



b)



c)



d) Compare estos resultados con la estimación que hizo y determine la diferencia entre la capacidad real y la capacidad que estimó. Complete la tabla.

Prisma	Capacidad real	Capacidad estimada	Diferencia
a)			
b)			
c)			

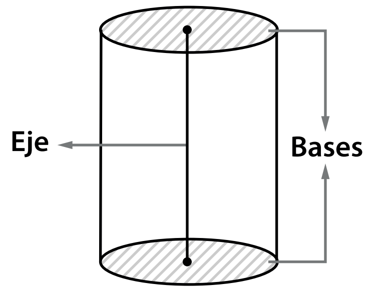
Clase 21

Tema: Área lateral y área total de un cilindro

Actividad 52

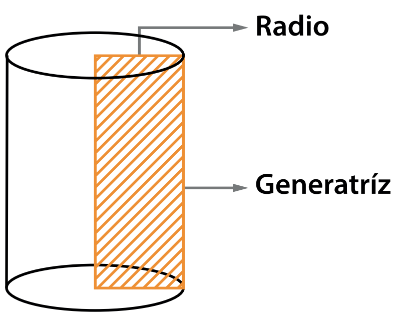
1 **Lea la siguiente información.**

Un cilindro y un prisma tienen en común que ambos tienen dos bases congruentes en un par de planos paralelos. En este caso las bases son círculos congruentes. 7



El segmento que une los centros de las bases se llama eje del **cilindro**. Si el eje es perpendicular a las bases, el cilindro es recto y la altura es la longitud de su eje.

Un **cilindro recto** puede ser considerado como una figura que se forma al hacer que un rectángulo rote y de un giro completo alrededor de uno de sus lados.



7

En las siguientes imágenes se observan varios objetos y una torre que tienen forma cilíndrica.

- Haga una lista de otros objetos de la vida real que tengan forma cilíndrica.

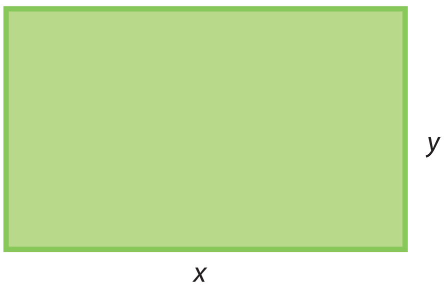
____

____

____

2 a) Tome una hoja de papel rectangular, mida cada uno de sus lados y trate de construir una figura cilíndrica. ¿Es esto posible?

____



b) ¿Qué correspondencia hay entre las dimensiones del rectángulo y las medidas del cilindro construido?

____

____

____

____

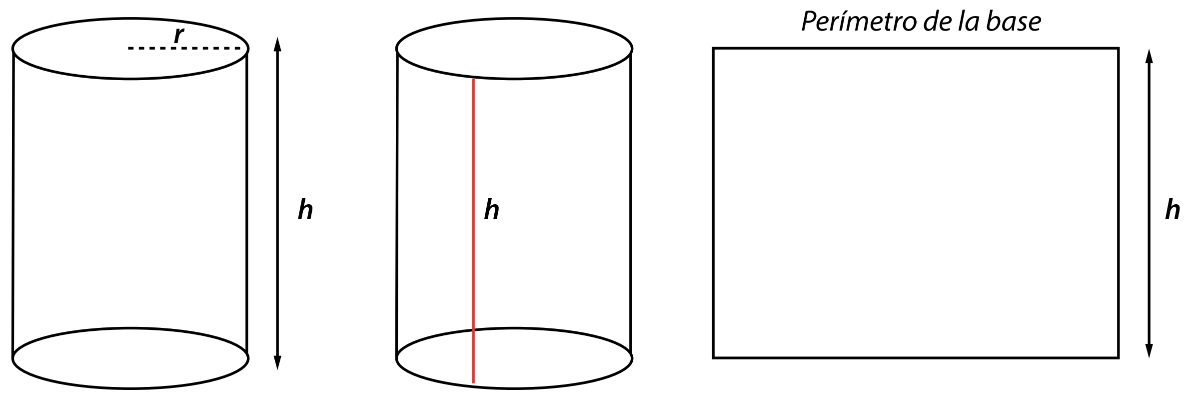
c) ¿Cuál es el valor del área de la superficie con la que se forma el cilindro?

____

____

3 **Lea la siguiente información.**

A partir de lo anterior, se puede deducir un procedimiento para determinar el **valor del área lateral** de un cilindro. Suponga que se tiene un cilindro recto hueco y sin bases de altura h y de radio r en la base.

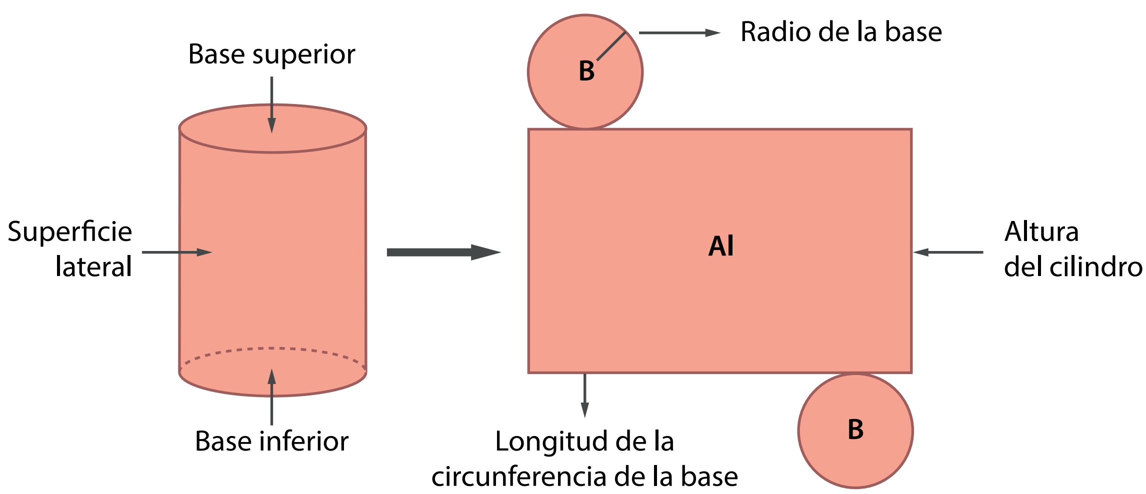


Si al cilindro se le hace un corte por la línea roja y luego se lleva la superficie del cilindro a un plano, se obtiene un rectángulo cuyas dimensiones son la altura y el perímetro de la base del cilindro.

Por tanto el área lateral del cilindro se obtiene multiplicando las dimensiones del rectángulo.

Área lateral: $A_L = (2\pi r)h = 2\pi rh$

Al considerar que el cilindro tiene dos bases circulares de área πr^2 cada una, se concluye que el área total del cilindro se obtiene sumando el área lateral más el área de las dos bases, esto es $A_T = A_L + 2B$ siendo $A_L = 2\pi rh$ y $B = \pi r^2$.

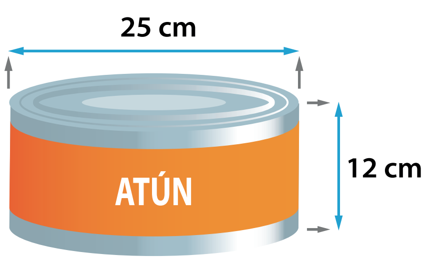


Área total: $A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

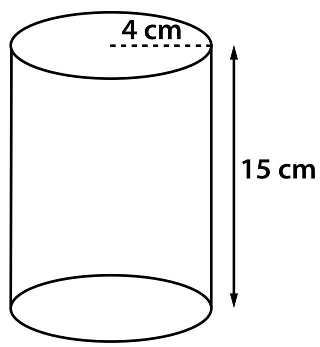
Clase 22

Actividad 53

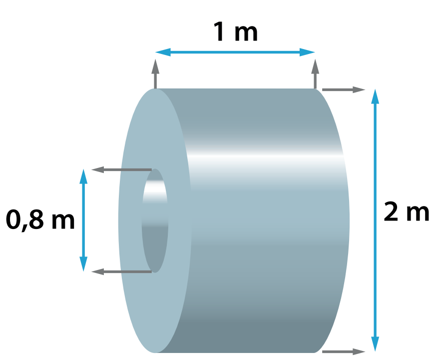
1 ¿Cuánto metal se requiere para construir una lata como la que se muestra en la figura?



2 En el cilindro recto de la figura, la altura es de 15 cm y el radio de la base es de 4 cm. Determine el área lateral y el área total del cilindro.



3 ¿Cuál es área total o superficie total de la bobina de acero que se muestra a continuación, sabiendo que el diámetro externo es de 2 metros, el diámetro del espacio vacío es de 0,8 metros y el largo es de 1 metro?

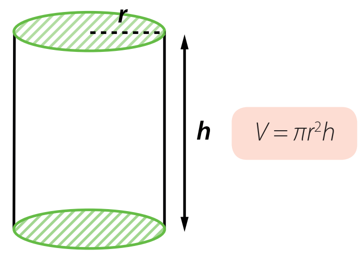


Actividad 54

1 **Un recipiente con forma de cilindro circular recto mide 45 cm de altura y 18 cm de diámetro. Encuentre el área lateral, el área total y el volumen.** 8

8

El valor del **volumen de un cilindro** se calcula a partir del volumen de un prisma suponiendo que las bases del prisma son circulares. Volumen del prisma $V = Bh$, B es área de la base y h la altura, entonces B se convierte en πr^2 siendo r el radio de la base.

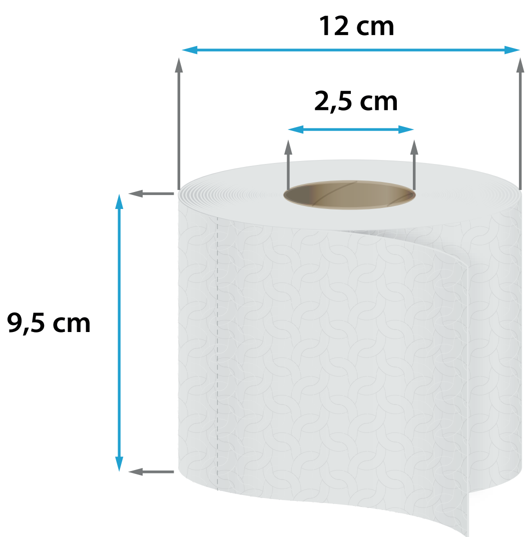


- ¿Cuál será la capacidad de un recipiente cilíndrico que tenga altura h y radio de la base r?

2 **Halle el volumen de la bobina de acero del punto 3 de la actividad anterior.**

3 **Se desea construir un tambor con una lámina metálica y dos regiones circulares de cuero. La altura del tambor es de 0,5 metros y el radio de la base es 25 cm. Calcule la cantidad de metal y de cuero que debe utilizarse.**

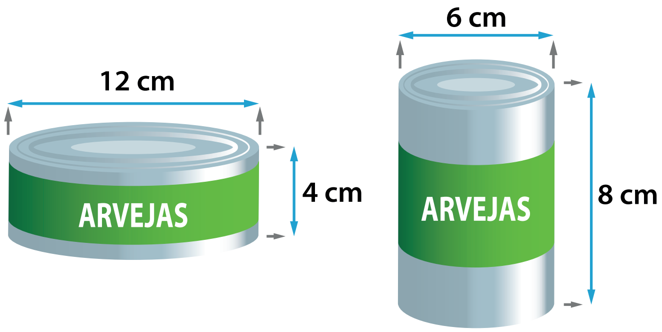
4 **Calcule el volumen del papel higiénico que hay en el siguiente rollo.**

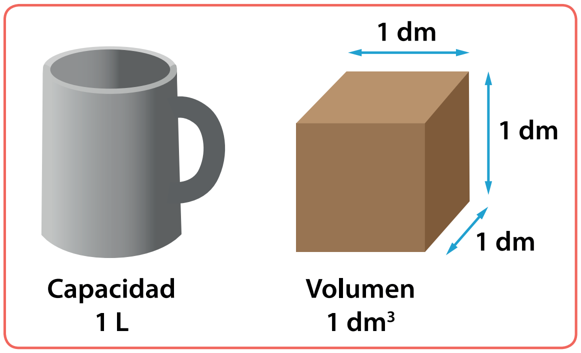


Clase 23 Esta clase tiene video

Actividad 55

1 **En una compañía de enlatados se utilizan recipientes con forma cilíndrica para empacar arvejas. A continuación se muestran dos tipos de estos recipientes.**





a) ¿Cuál de los dos recipientes tiene mayor capacidad?

b) Los recipientes son elaborados en hojalata. ¿En cuál de los dos recipientes se utiliza mayor cantidad de superficie de hojalata para su elaboración?

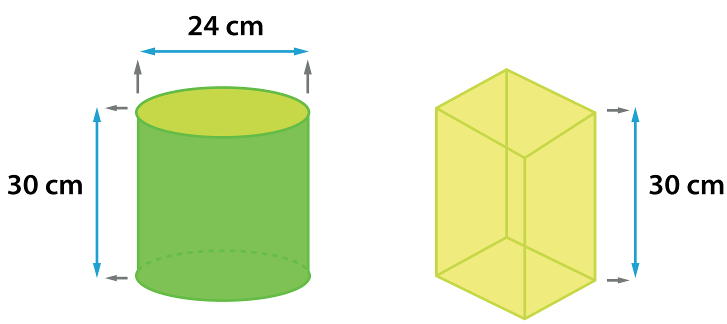
c) ¿En cuál de las dos etiquetas se utiliza mayor cantidad de papel, si estas cubren toda la cara lateral del respectivo recipiente?

2 **Una reconocida marca de bebidas refrescantes diseñó una nueva forma de envases para su producto estrella. La capacidad de los envases es $\frac{1}{3}$ litro y $\frac{1}{2}$ litro y, el diseño es el mismo para los dos, es decir los envases son semejantes y tienen el mismo diámetro.**

a) ¿Cuál es la altura de la lata grande si la de la pequeña es de 12 cm?

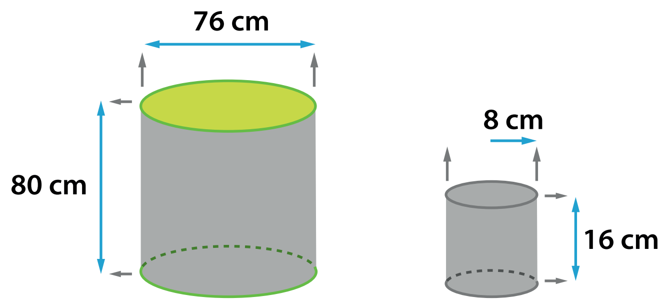
b) Halle la superficie de la base de la lata pequeña si se sabe que la de la grande es de 75 cm^2

3 **Una empresa empaca pañuelos faciales en cajas de forma cilíndrica de diámetro 24 cm y altura 30 cm. Con el fin de disminuir los costos del empaque se cambiará su presentación y ahora se utilizarán cajas rectangulares de base cuadrada y de la misma altura al empaque anterior. Para que las dos cajas tengan la misma capacidad, ¿cuál debe ser la longitud del lado de la base de la caja rectangular?**

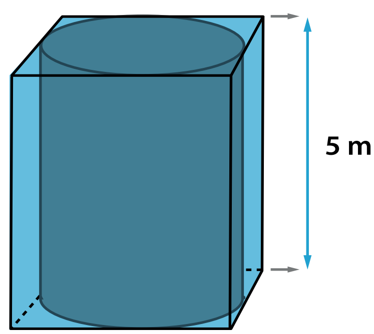


Actividad 56

1. Si en el recipiente grande hay agua, ¿cuántos recipientes pequeños llenos de agua se deben sacar del recipiente grande para que este quede totalmente vacío?



2. Un depósito cúbico de arista 5 metros se encuentra lleno de agua. Si se introduce un cilindro de altura 5 metros y radio de la base igual 2,5 metros, ¿qué porcentaje queda de la cantidad de agua inicial?



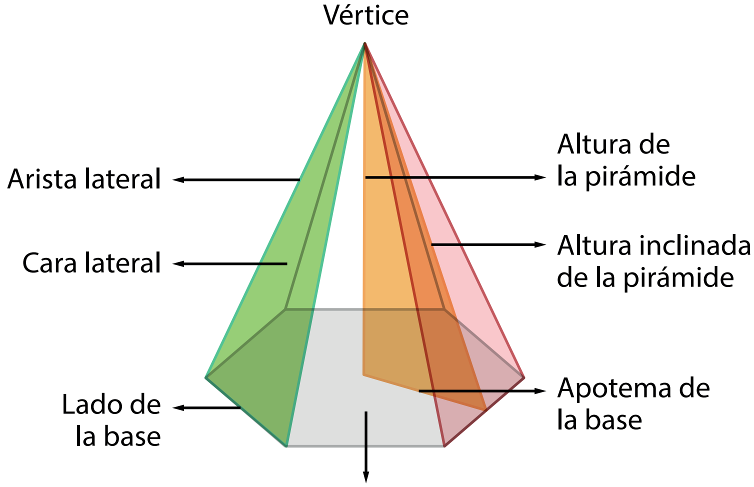
Clase 24

Tema: Las pirámides

Actividad 57

1 **Lea la siguiente información**

Una **pirámide** es un poliedro en el cual todas sus caras excepto una tienen un vértice común, llamado **vértice de la pirámide**. La cara que no contiene al vértice es la **base de la pirámide**. 9



- En las pirámides y en los prismas las caras que no son bases son **caras laterales**.
- Las aristas que no pertenecen a las bases se llaman **aristas laterales**.
- La **altura de la piramide** es la longitud del segmento perpendicular desde el vértice hasta la base de la pirámide.
- En las pirámides regulares las caras laterales son triángulos isósceles y la altura de cada una de ellas recibe el nombre de **altura inclinada de la pirámide**.

Las piramides pueden ser regulares, irregulares, rectas u oblicuas.

- **Regulares:** si la base es un polígono regular y sus caras laterales son congruentes.
- **Irregulares:** si la base no es un polígono regular.
- **Rectas:** si todas sus caras laterales son triángulos isósceles y su altura cae en el centro de la base.
- **Oblicuas:** aquellas en las que no todas sus caras laterales son triángulos isósceles.

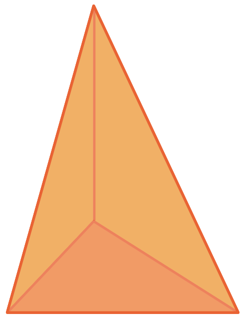
Las piramides tambien se pueden clasificar según la forma de su base. Si su base es un triángulo será triangular, si es un cuadrado será cuadrangular, si es un hexagono sera hexagonal, etc.

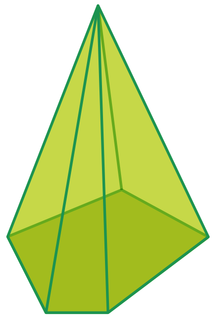
9

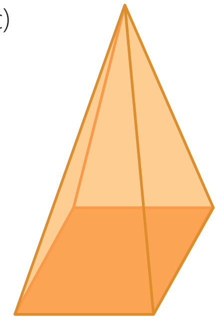
La pirámide de Keops tiene como medidas aproximadas 230,3 metros de lado (base cuadrada) y 146,6 metros de altura. Las autoridades egipcias, preocupadas por el deterioro de las pirámides, decidieron aplicarles un impermeabilizante sobre las paredes.

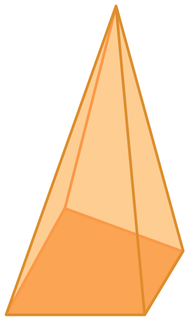
- ¿Cómo podría determinar, aproximadamente, cuántos metros cuadros de impermeabilizante se requiere para proteger la pirámide?

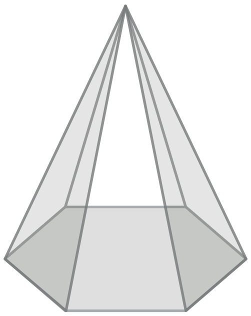
2 **Escriba el nombre de cada pirámide de acuerdo con la clasificación.**

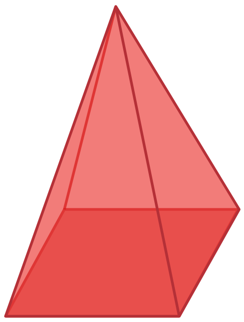
a)


b)


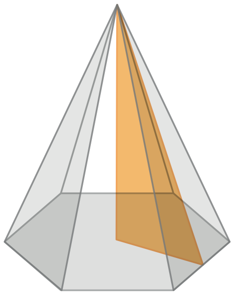
c)


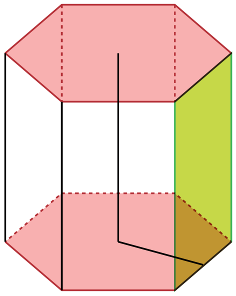
d)


e)


f)


3 **Escriba las características, comunes y no comunes, que hay entre los dos poliedros que se muestran a continuación.**





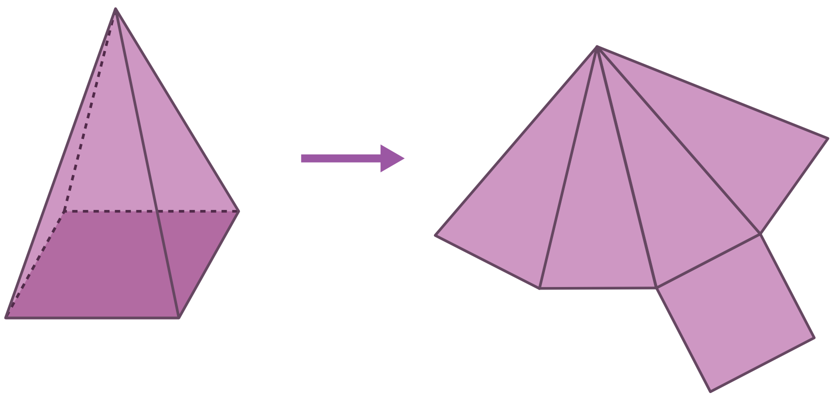
Clase 25

Tema: Desarrollo de una pirámide

Actividad 58

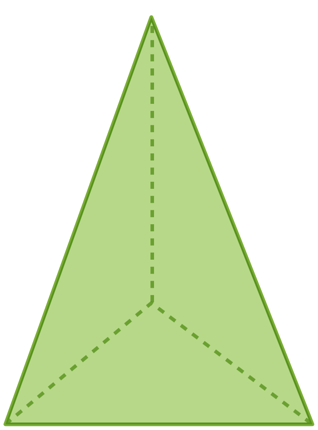
1 Lea la siguiente información

El desarrollo plano de un poliedro consiste en determinar la unión de las superficies que lo limitan. Así el desarrollo de una pirámide de base cuadrada puede ser el siguiente.



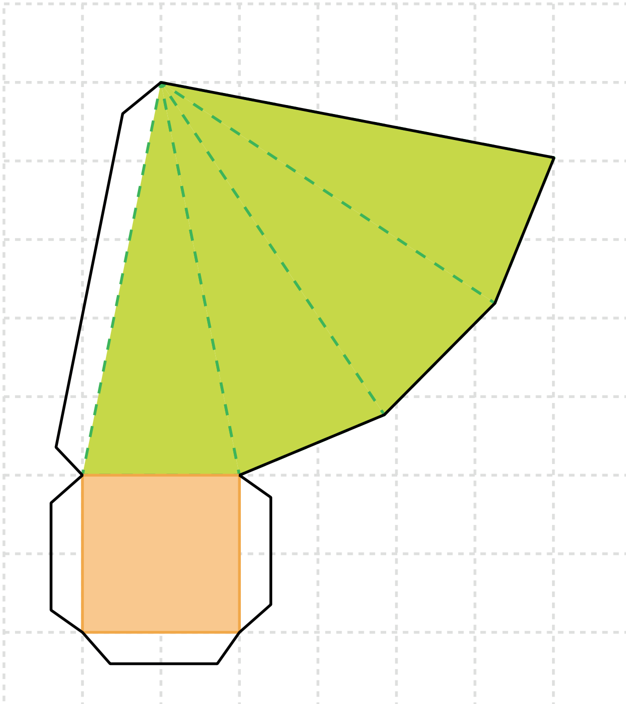
a) Describa cómo se podría determinar la medida de la superficie total que limita esta pirámide.

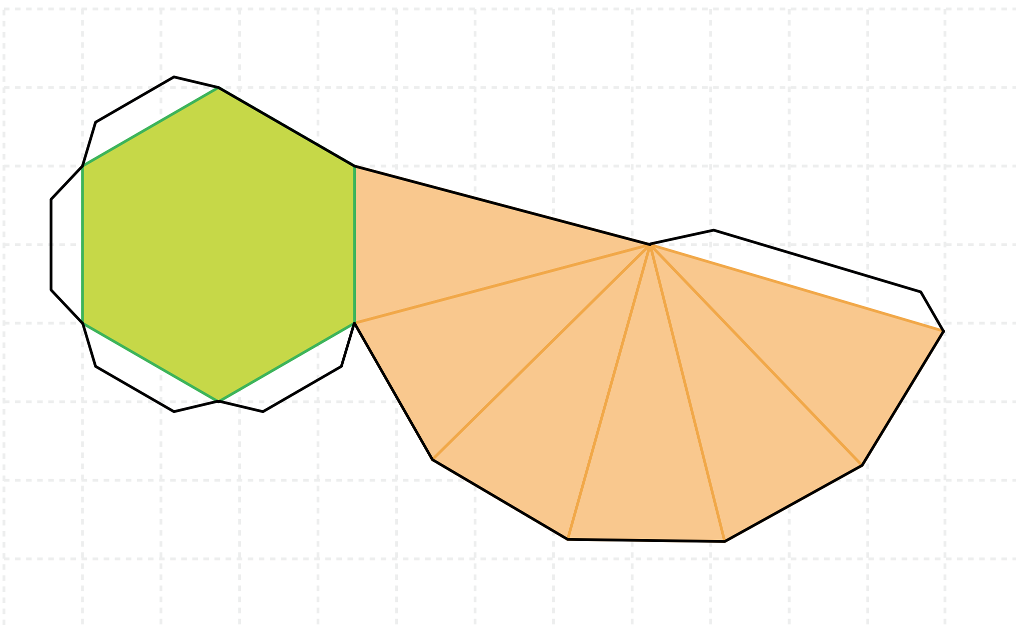
b) Dibuje un posible desarrollo plano para la siguiente pirámide.



Actividad 59

Copie o calque sobre papel milimetrado los desarrollos planos y forme las pirámides dadas. Tenga en cuenta que en el papel milimetrado cada cuadrado negro es 1 cm².



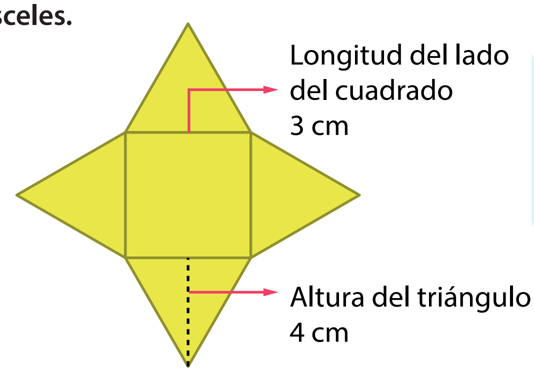


Clase 26 Esta clase tiene video

Tema: Área y volumen de las pirámides

Actividad 60

1 **El área total de una pirámide se puede calcular a partir de su desarrollo plano. P. ej., el desarrollo plano de la siguiente pirámide está compuesto por un cuadrado (base) y cuatro (4) triángulos isósceles.**



a) Calcule el área de la base (cuadrado).

b) Calcule el área lateral es decir el área de todas las caras laterales (cuatro triángulos).

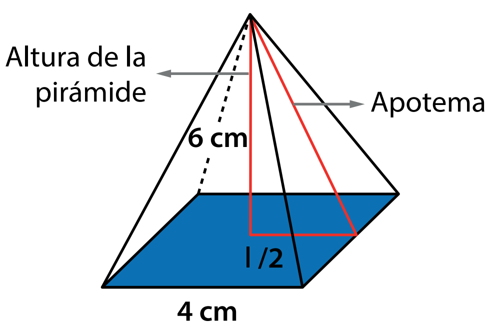
c) Calcule el área total de la pirámide.

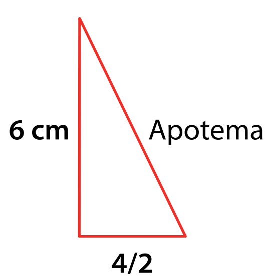
2 **Se debe tener en cuenta que la altura de la pirámide es diferente a la altura de cada una de las caras (triángulos) llamada apotema (o altura inclinada de la pirámide).**

Para calcular la longitud de la apotema se emplea el teorema de Pitágoras.

a) Calcule la apotema de la pirámide de base cuadrada de la imagen.

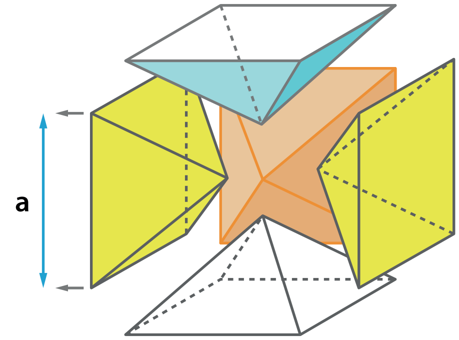
b) Calcule el área total de la pirámide que que aparece en la imagen.





Actividad 61

1 **Lea con atención cómo se obtiene el volumen de una pirámide de base cuadrada.**



Si se descompone un cubo en cuerpos parciales generados a partir de las cuatro diagonales espaciales, se obtienen seis (6) pirámides del mismo tamaño y de $\frac{a}{2}$ de altura, como se observa en la imagen.

Como el volumen del cubo es $V_C = a^3$

$$V_c = A_B \cdot a \quad \text{con} \quad A_B = a^2$$

Como el volumen de la pirámide es $\frac{1}{6}$ del volumen del cubo, entonces

$$V_P = \frac{1}{6} \cdot A_B \cdot a$$

Si llamamos h a la altura de la pirámide, se tiene que $a = 2h$, con lo cual

$$V_P = \frac{1}{6} \cdot A_B \cdot 2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

2 **Calcule el volumen de las siguientes pirámides.**

a) $A_B = 400\ cm^2$ y altura $h = 85\ cm$

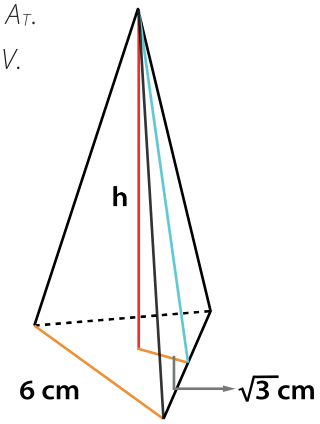
b) $A_B = 1{,}5\ cm^2$ y altura $h = 3{,}5\ cm$

3 **La pirámide de la imagen tiene base triangular; la arista de la base mide 6 cm y su altura mide 4 cm.**

a) Dibuje el desarrollo plano de la pirámide.

b) Calcule el área total A_T.

c) Calcule el volumen V.

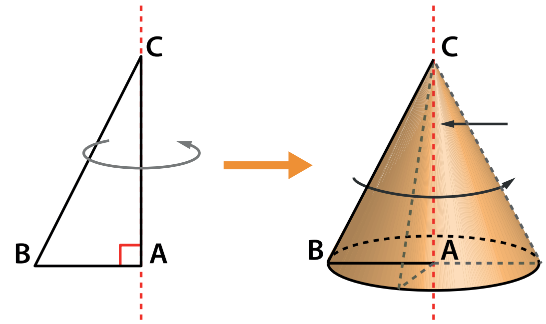


Clase 27

Tema: El cono

Actividad 62

1 **Observe el triángulo *BAC* rectángulo en ∡*A* cuando gira alrededor de su cateto $\overline{CA}$.**



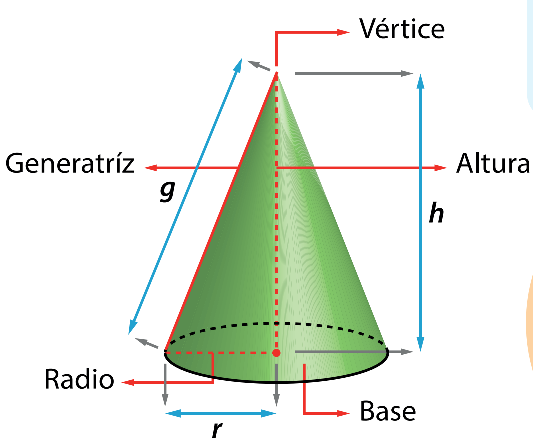
a) ¿Reconoce el cuerpo geométrico que se forma?

____

b) Escriba objetos de uso cotidiano que tengan esta misma forma.

____

Un cono es un cuerpo redondo formado por una única base (que es un círculo) y por una superficie lateral curva.



Entre la generatriz, el radio de la base y la altura del cono, se forma un triángulo rectángulo

c) Determine la longitud de la generatriz de un cono circular recto que tiene de altura 8 cm y el radio de la base es 3 cm.

d) Determine la longitud del radio de la base de un cono circular recto que tiene altura 15 cm y generatriz 17 cm.

e) Determine longitud de la altura de un cono que tiene generatriz de 20 cm y radio de la base 12 cm.

Actividad 63

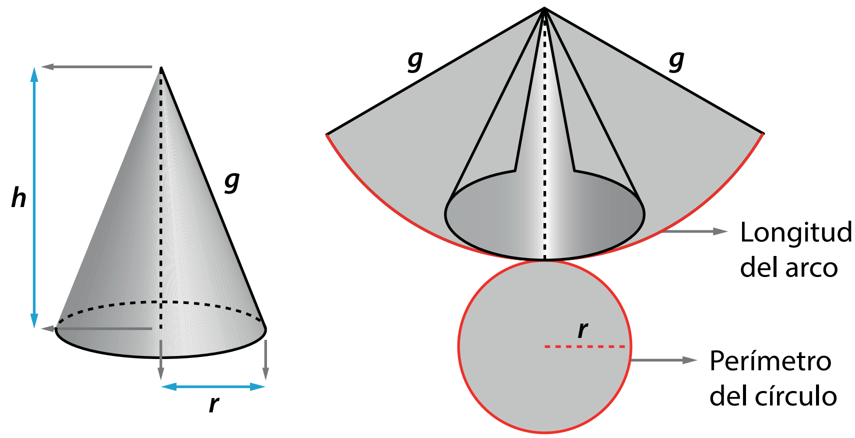
1 **Lea la siguiente información.**

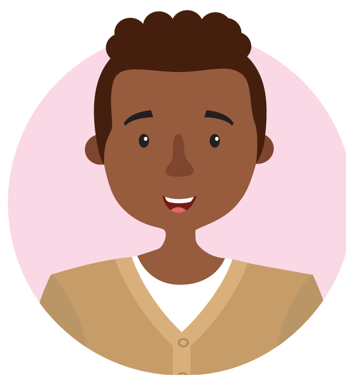
El desarrollo plano de un cono recto es un sector circular y un círculo.

El **sector circular** está delimitado por dos generatrices; la medida del lado curvo (longitud del arco) debe ser igual a la longitud de la circunferencia de la base (perímetro de la circunferencia).

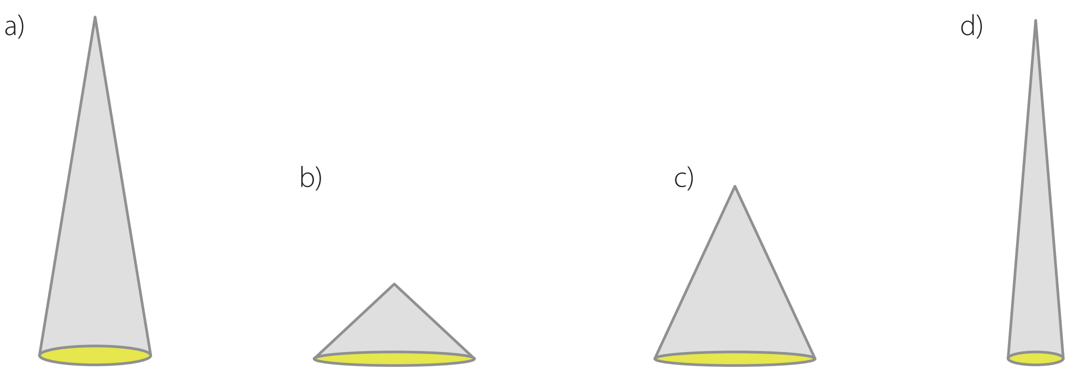
Recuerde que el perímetro de una circunferencia es

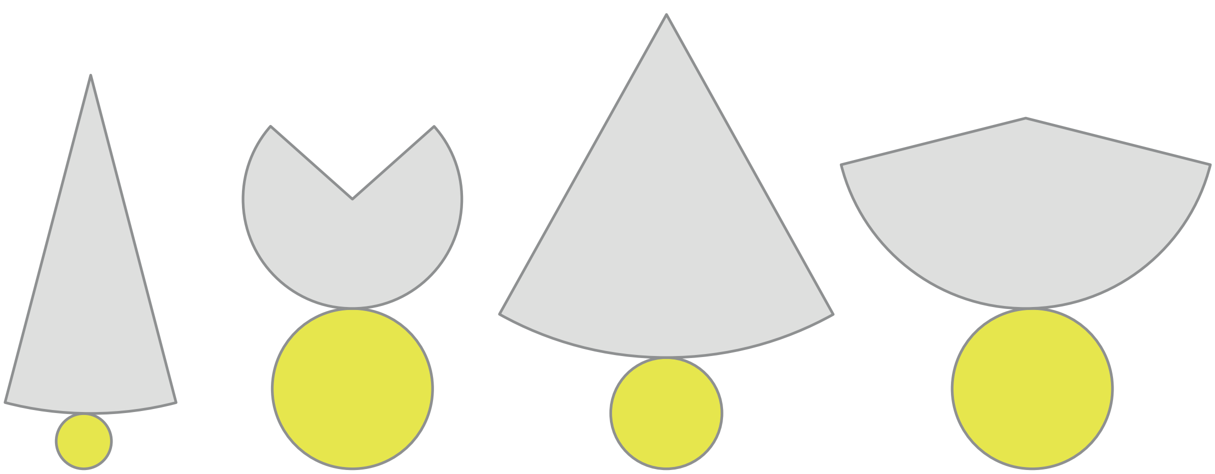
$P = 2\pi r$





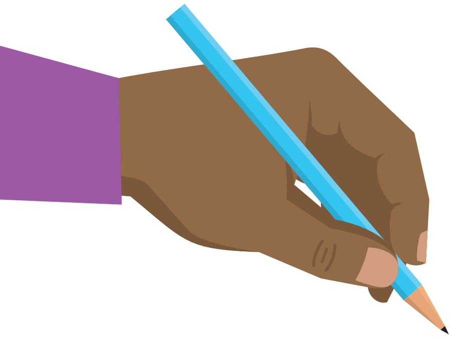
2 **Relacione, con una línea recta, cada cono con su correspondiente desarrollo.**

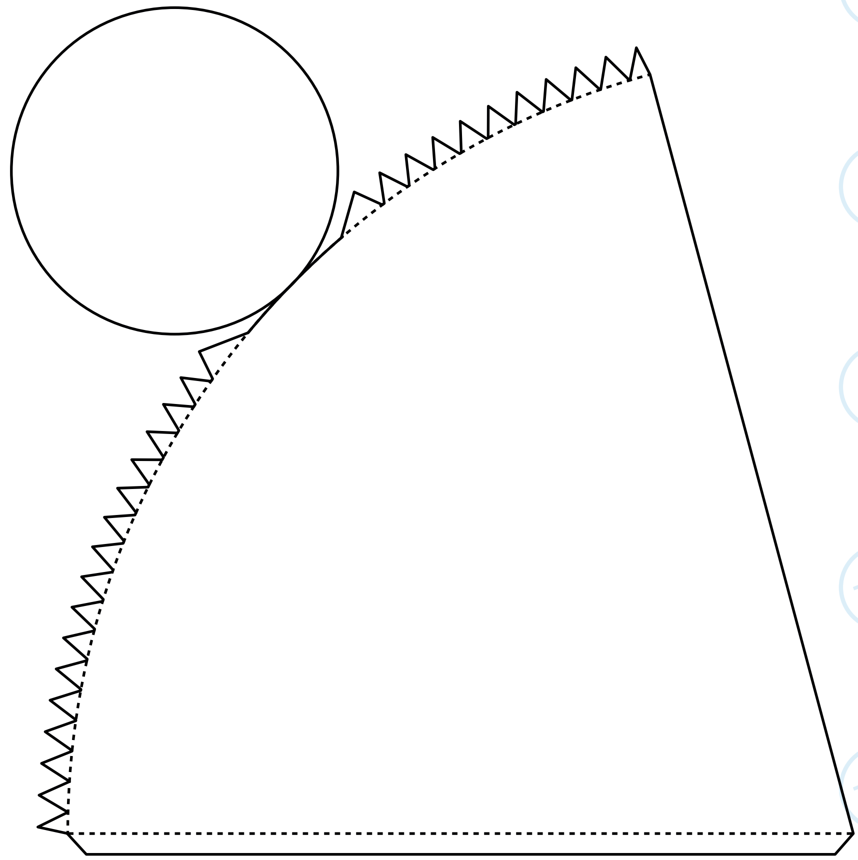


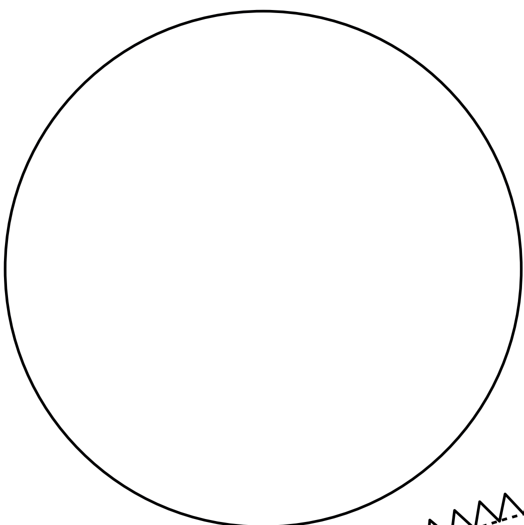


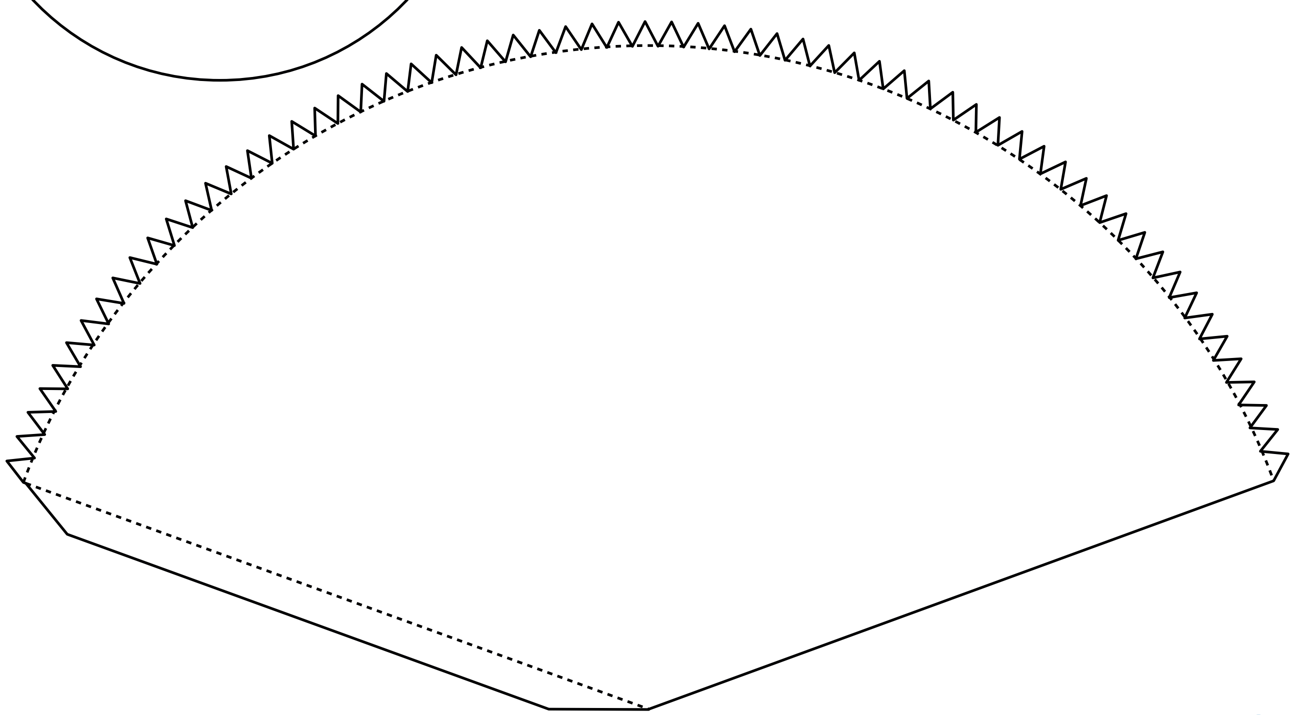
Actividad 64

Copie en una hoja blanca y arme los siguientes conos. Identifique sus elementos y defina los nombres.



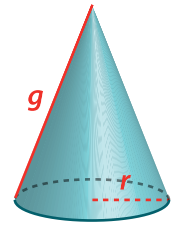






Clase 28

Tema: Área y volumen del cono



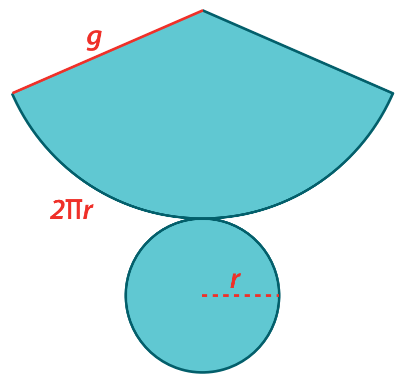
Actividad 65

1 **Lea con atención la siguiente información.**

El **área total de un cono** se puede determinar a partir del desarrollo que, como vimos, tiene dos partes. Así que primero determinamos el área de cada parte y luego, las sumamos.

$A_B = \pi \cdot r^2$ (Área de la base)

$A_L = \pi \cdot r \cdot g$ (Área del sector circular)



Entonces

$A_T = A_B + A_L$ (Área total)

$A_T = (\pi \cdot r^2) + (\pi \cdot r \cdot g)$

$$A_T = \pi \cdot r(r + g)$$

a) Luisa está calculando el área total de un cono con radio $r = 8$ cm y altura $h = 6$ cm, pero se le ha regado la tinta del esfero en algunas partes de su hoja. Escriba las partes que faltan en el procedimiento. 10

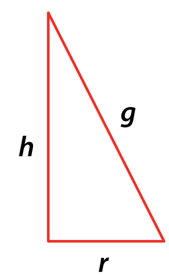
$A_T = \pi \cdot r(r + g)$

$g = \sqrt{\quad + \quad}$ $A_T = \pi \cdot \quad (\quad + \quad)$

$g = \sqrt{\quad}$ $A_T = \pi \cdot \quad cm^2$

$g = 10$ $A_T \approx \quad cm^2$

10 **Recuerde que…** en el cono se genera el triángulo rectángulo.



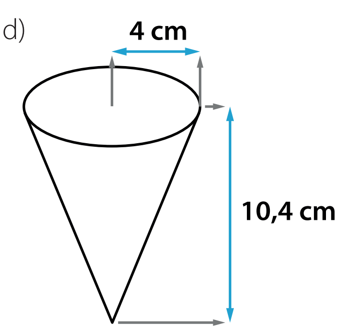
2 **Calcule el área total de cada uno de los conos dados.**

a) $g = 30\ cm$ y $r = 14\ cm$

b) $r = 62\ mm$ y $g = 14\ cm$

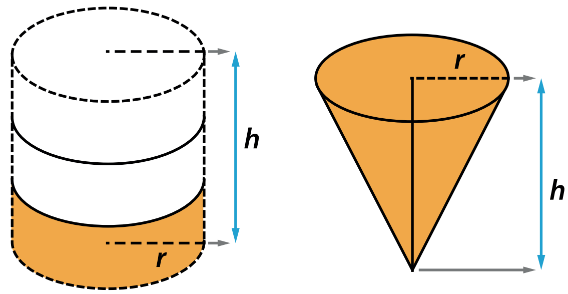
c) $d = 5{,}4\ cm$ y $g = 3{,}5\ cm$

d)



Actividad 66

1 Observe en la gráfica dos recipientes que tienen igual altura e igual base.



a) Si quisiera tomar más líquido, ¿cuál de los dos recipientes elegiría? Explique su respuesta.

____

b) Calcule el volumen del cilindro de radio 4 cm y altura 10 cm y el volumen del cono del mismo radio y la misma altura. Luego, determine qué parte del contenido del recipiente con forma de cilindro ocupa el contenido en el recipiente con forma de cono. 11

11

Con recipientes de forma cilíndrica o cónica es posible comparar su volumen. De esta manera, es posible verificar que el volumen del cono es 1/3 del volumen de un cilindro que tiene la misma base y la misma altura.

Por lo tanto el volumen del cono se puede calcular con la fórmula:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

- En la formula del volumen, ¿qué representa la expresión $\pi \cdot r^2$?

____

____

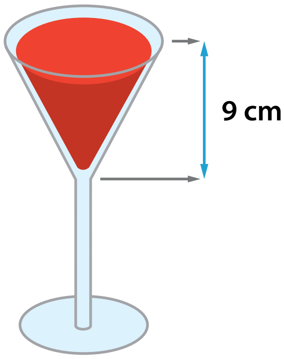
2 Calcule el volumen de cada uno de los siguientes conos:

a) $r = 3\ cm$ y $h = 6cm$

b) $r = 9\ cm$ y $h = 40\ mm$

c) $r = 80\ mm$ y $h = 7{,}5\ cm$

3 **Una copa con forma de cono tiene en su borde superior un diámetro de 8 cm y en el interior tiene una altura de 9 cm. ¿Cuánto líquido se encuentra en la copa, si se llena hasta el borde?**



Actividad 67

1 **Complete la siguiente tabla calculando las magnitudes que faltan para un cono recto. Calcule primero las variables.**

r	h	g	V	A_B	A_L	A_T
	2,5 cm		24 cm^3			
		2,6 dm			17 dm^2	
		2,7 cm		2,3 cm^2		

2 **El techo de una torre tiene forma de cono con diámetro de la base $d = 4{,}8\ m$ y altura $h = 6\ m$.**

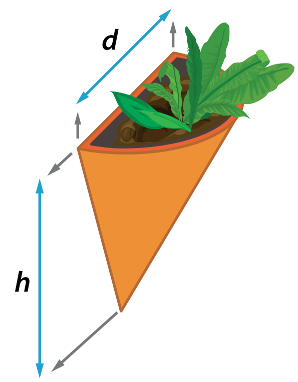
a) ¿Cuál es el volumen del techo? ____________________

b) Cuánto cuesta el recubrimiento del techo en baldosa, si se calcula que 1 m^2 de este recubrimiento cuesta $ 24.000?

3 **Una matera de metal tiene forma de medio cono con $d = 80\ cm$ y $h = 60\ cm$.**

a) ¿Qué capacidad tiene la matera?

b) Calcule el área de la lámina de metal necesaria en su fabricación.

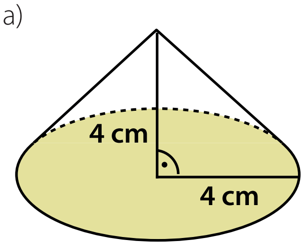


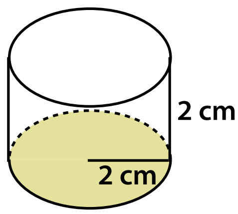
Clase 29 Esta clase tiene video

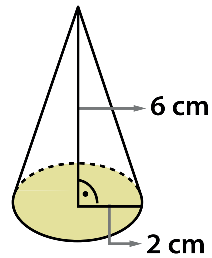
Tema: Relación entre capacidades de cuerpos geométricos

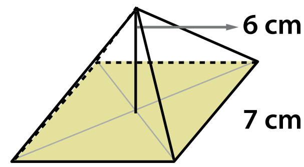
Actividad 68

1 **Ordene los siguientes cuerpos geométricos de mayor a menor volumen.**

a)


b)


c)


d)


2 **Lea la siguiente información.**

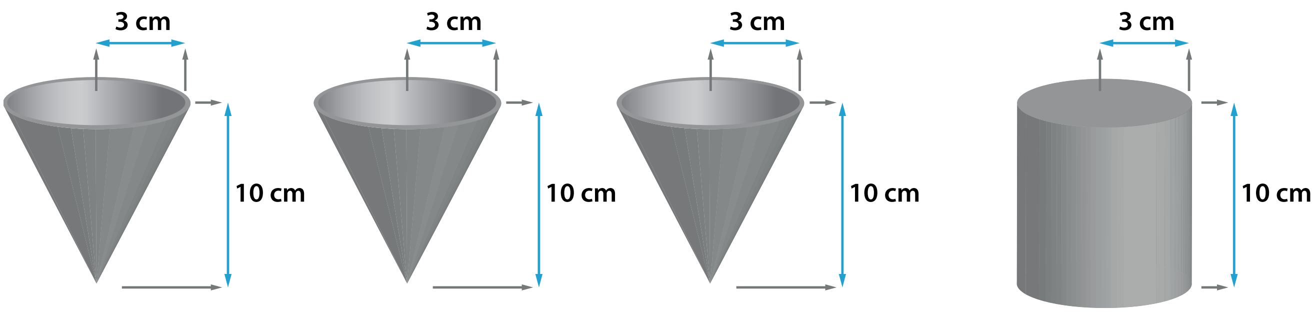
Volumen y **capacidad** son dos conceptos relacionados al espacio que un cuerpo cualquiera puede ocupar. Mientras el volumen hace referencia al espacio que ocupa un cuerpo, la capacidad hace referencia al espacio que contiene; calcular el volumen es medir cuánto ocupa, mientras que calcular su capacidad es medir cuánto cabe en él.

a) Determine la capacidad (en mililitros) de los cuerpos geométricos de la actividad anterior; tenga en cuenta que $1 l = 1000\ ml$.

b) Tome el cuerpo geométrico con mayor volumen y determine cuánto le hace falta para que su capacidad llegue a ser un litro.

Actividad 69

Los tres recipientes con forma de cono de la imagen llenan el recipiente con forma de cilindro.



1. Determine la capacidad (en mililitros) de cada cono y del cilindro.
2. En el comercio encontramos que los vasos se determinan por su volumen en onzas, sabiendo que una onza es equivalente a 30 ml. Determine de cuántas onzas son los recipientes de esta actividad.

Actividad 70

1. Tres recipientes con forma de pirámide de base cuadrada llenan uno con forma de prisma cuadrado (con área de la base y alturas congruentes). Si se sabe que el recipiente con forma de prisma se llena con 1,2 litros calcule la capacidad, en litros, de uno de los recipientes con forma de pirámide.

2 **Un recipiente con forma de prisma tiene una base de 30 centímetros por cada lado. ¿Cuál debe ser su altura si tiene una capacidad de 36 litros?**

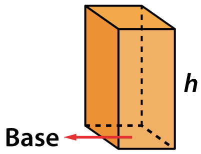
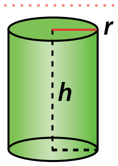
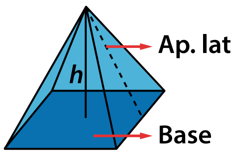
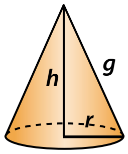
3 **En un envase con forma de prisma cuadrangular de base 5 cm caben 250 cm³ de aceite.**

a) ¿Cuál es la altura del recipiente?

b) ¿Cabría la misma cantidad de aceite en un envase con forma de pirámide cuya base y altura sean iguales que en el envase anterior?

Resumen

Fórmulas de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Cuerpo geométrico	Esquema	Área	Volumen
Prisma		$A_T = A_L + 2A_B$	$V = A_B \cdot h$
Cilindro		$A_T = 2\pi \cdot r(h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Pirámide		$A_T = A_L + A_B$	$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$
Cono		$A_T = \pi \cdot r(r + g)$	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Clase 30 Esta clase tiene video

Tema: Poliedros regulares

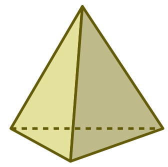
Actividad 71

1 **Lea la siguiente información.**

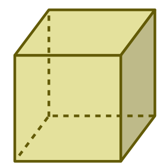
Hay cinco cuerpos geométricos convexos especiales, llamados poliedros regulares. Cada uno de estos poliedros está conformado exclusivamente por **polígonos regulares** congruentes y a cada vértice de cada uno de estos poliedros llegan igual número de aristas.

Los cinco poliedros se llaman también **sólidos platónicos**, nombrados así en memoria del sabio Platón quien asoció a cada poliedro uno de los elementos que según los griegos formaban el universo: Tetraedro (fuego), Ortoedro (aire), Icosaedro (Agua), Hexaedro (tierra) y Dodecaedro (universo).

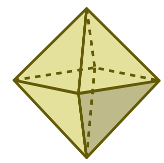
Tetraedro



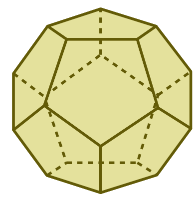
Hexaedro (cubo)



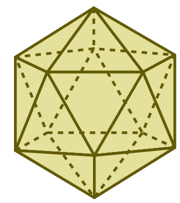
Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro



2 **Los prefijos de cada nombre representan en griego el número de caras que lo conforman. Escriba que número representa cada prefijo:**

a) Tetra (*tettares*) ______________ b) Dodeca (*dodeka*) ______________ c) Hexa (*hex*) ______________

d) Icosa (*eikosi*) ______________ e) Octa (*okto*) ______________

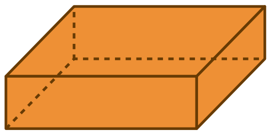
3 **Complete la tabla con las características de los poliedros:**

Poliedro	Número de aristas	Número de vértices	Número de caras	Forma geométrica de cada cara
Tetraedro				
Hexaedro (cubo)				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

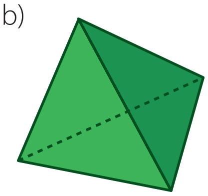
Actividad 72

1 **De los siguientes cuerpos geométricos indique cuáles corresponden a poliedros regulares y cuáles no. Justifique cada respuesta.**

a)

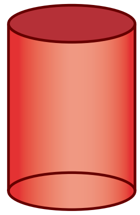


b)

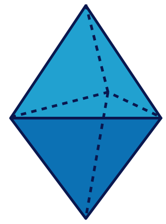


(4 triángulos equiláteros)

c)



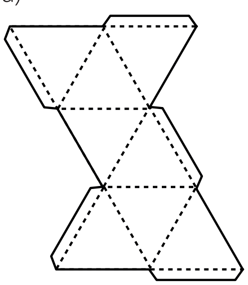
d)



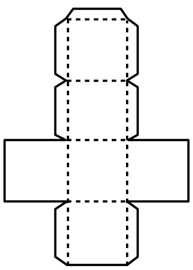
(6 triángulos equiláteros)

2 **Las siguientes figuras corresponden a los desarrollos de los poliedros regulares. Observe sus características y escriba el nombre del poliedro al que corresponde**

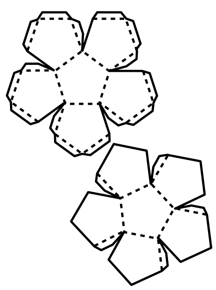
a)



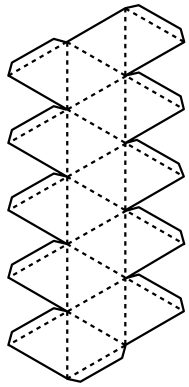
b)



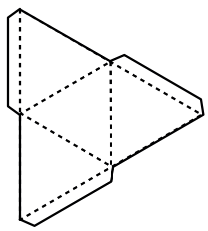
c)



d)



e)



3 **Escriba si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Las que sean falsas, explique por qué.**

a) Un cilindro es un poliedro. ______________________

b) En cada vértice de un poliedro concurren al menos tres caras. ______________________

c) Una pirámide de base pentagonal es un poliedro. ______________________

d) Un poliedro tiene al menos diez aristas. ______________________

e) Una pirámide de base cuadrada es un poliedro regular. ______________________