Institucion Educativa

JUAN PABLO I

La Llanada Nariño.

Matematicas.

GRADO 9°

MODULO EDUCATIVO 2

Aulas sin fronteras

Los contenidos educativos de Aulas sin Fronteras buscan apoyar a los docentes mediante la producción de planes completos en secuencias didácticas acompañadas por video clips y recursos impresos para estudiantes.

ALCALDÍA MUNICIPAL
LA LLANADA
NIT: 800.149.894-0
Comprometidos con la comunidad

MUNICIPIO LA LLANADA

Colombia aprende
La red del conocimiento

El futuro es de todos
Gobierno de Colombia

Gobernación de Nariño
¡EN DEFENSA DE LO NUESTRO!

Clase 21

Esta clase tiene video

Tema: Función lineal. Formas de la ecuación de la recta

Actividad 59

1 **Lea la siguiente información:**

Modelo de costo lineal

Cuando una empresa produce un artículo se presentan dos tipos de costos: los **fijos** y los **variables**.

- Los **costos fijos** son aquellos que se tienen independientemente de si se producen o no artículos: por ejemplo, el pago de servicios, de salarios, de arriendos, etc.
- Los **costos variables** dependen del nivel de producción, es decir, del número de artículos que se produzcan.

Teniendo en cuenta lo anterior, el costo total se puede representar con la siguiente expresión:

$$C_T = C_V + C_F$$

Donde C_T es el costo total, C_V y C_F son, respectivamente, el costo variable y el costo fijo.

Esta función recibe el nombre de modelo de costo lineal.

Como es un modelo lineal, debe aplicar todo lo que aprendió en las clases anteriores.

Ahora, analicemos algunos aspectos de la expresión:

- Si consideramos que el costo variable C_V por artículo producido es constante, se tiene que C_V será **proporcional** al número de artículos producidos.
- Si llamamos m al C_V por unidad, tendremos que el C_V de producir x artículos (en pesos) será mx.
- Además, si llamamos b a C_F podemos plantear la siguiente función para calcular el costo total de producir x número de artículos:

$$C_T(x) = mx + b$$

Actividad 60

Resuelva las siguientes situaciones teniendo en cuenta la información de la página anterior.

El costo de producir 10 juegos de video al día es de 350 dólares, mientras que producir 30 juegos del mismo tipo al día cuestan 850 dólares. Si suponemos un modelo lineal como el descrito anteriormente, determine:

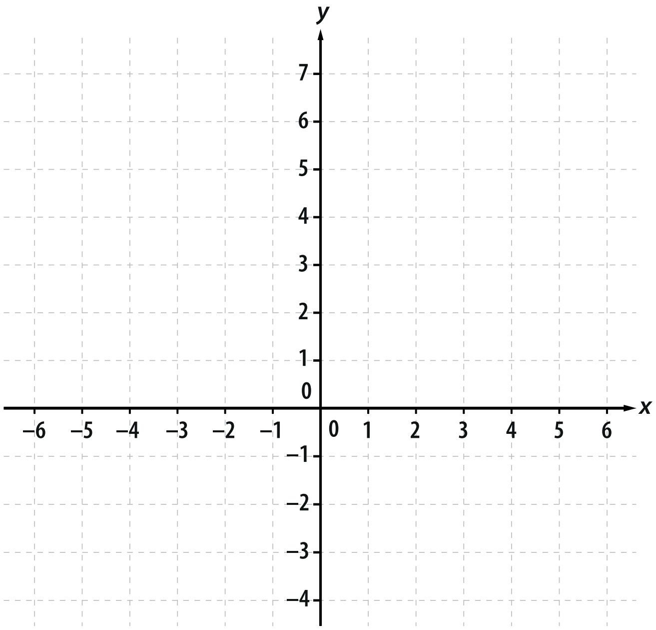
1 **El costo de producir un juego de video.**

2 **Si se ha establecido que los costos fijos diarios para esta empresa son de 100 dólares, encuentre la relación entre el costo total C(x) y el número *x* de juegos de video producidos.**

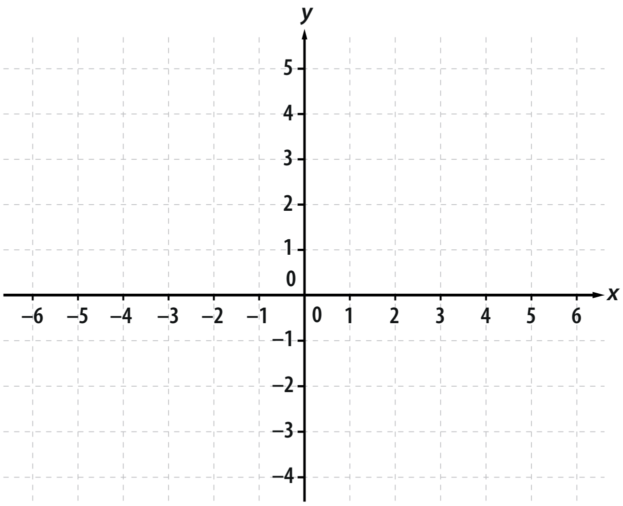
Actividad 61

1 **Trace la gráfica de cada una de las rectas que pasan por los puntos indicados, determine la pendiente, el intercepto con el eje y la ecuación de dichas rectas.**

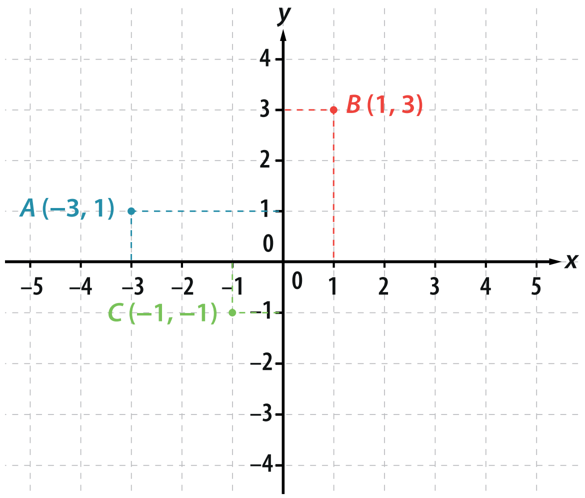
a) *P*(2, 5) y *Q*(4, 7)



b) *P*(–2, 1) y *Q*(3, –4)



2 **Considere la gráfica dada:**

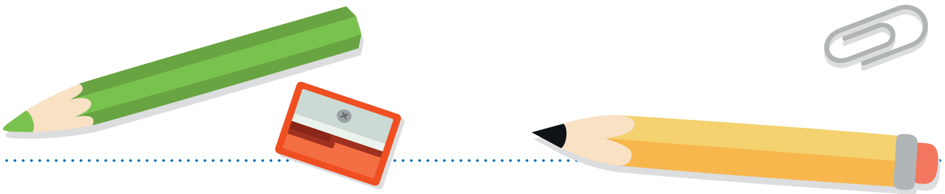


a) Trace la recta que pasa por los puntos *A* y *B*. Determine su ecuación $y = mx + b$.

b) Trace la recta que pasa por los puntos *A* y *C*. Determine su ecuación $y = mx + b$.

c) Trace la recta que pasa por los puntos *B* y *C*. Determine su ecuación $y = mx + b$.

d) Trace la recta que pasa por los puntos *B* y el origen del plano cartesiano. Determine su ecuación $y = mx + b$.



Clase 22

Actividad 62

1 **Lea y analice el ejemplo dado.**
Una recta tiene pendiente *m* = 3 y pasa por el punto *M*(–2, –1). Determine:

a) La ecuación de la recta.

Para hallar la ecuación de la recta, se realiza el siguiente procedimiento:

Paso 1. Se reemplaza m por 3 en la ecuación $y = mx + b$, obteniendo

$$y = 3x + b$$

Se observa que aún falta hallar b.

Paso 2. Para hallar b, se reemplazan las coordenadas del punto M en la ecuación anterior, así:

$$-1 = 3\,(-2) + b$$

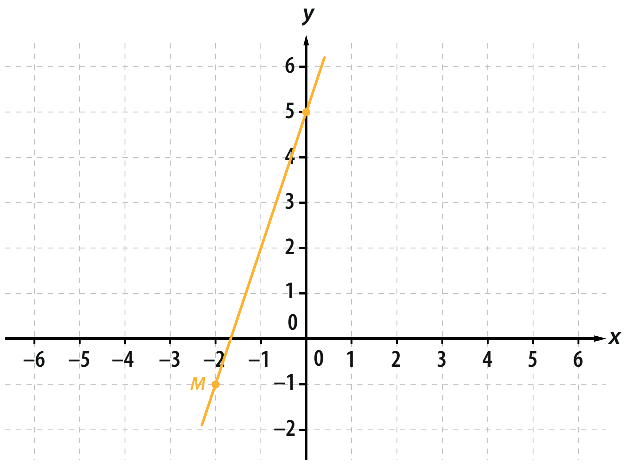
Se despeja b de esta ecuación, y se concluye que $b = 5$

Paso 3. Se escribe la ecuación de la recta.

$$y = 3x + 5$$

b) La grafica de la recta.

Para dibujar la recta, se ubica el y-intercepto, que en este caso es en (0, 5) y se hacen los desplazamientos que indica la pendiente.



2 **En cada caso, halle la ecuación de la recta y elabore la gráfica.**

a) $P(-3, -2)$ y $m = -2$

b) $P(-5, -4)$ y $m = \frac{3}{4}$

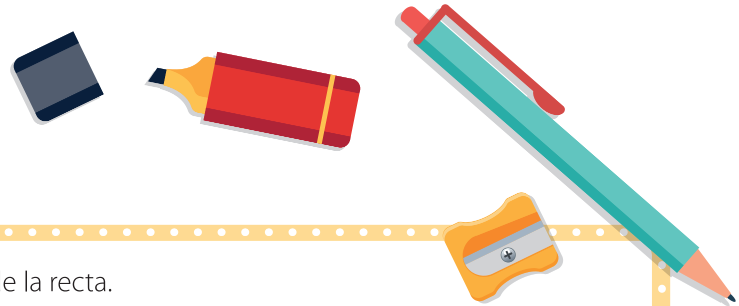
Actividad 63

La igualdad $y - y_1 = m(x - x_1)$ es la forma de la ecuación de una recta que pasa por un punto P de coordenadas (x_1, y_1) y tiene una pendiente m. Utilícela para determinar la ecuación de la recta en cada caso.

① $P(6, -1)$ y $m = -\frac{1}{2}$

② $P(3, 1)$ y $m = 7$

Clase 23



Actividad 64

1 **Lea la siguiente información:**

Es posible trabajar a partir de tres ecuaciones de la recta.

- **La primera**. Ecuación dada la pendiente m y la ordenada al origen b (y-intercepto); esta ecuación es conocida como ecuación pendiente y-intercepto y es la siguiente:

$$y = mx + b$$

- **La segunda**. Ecuación de una recta que pasa por un punto $P(x_1, y_1)$ y tiene una pendiente m. Esta ecuación se conoce como punto-pendiente y es la siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- **La tercera**. Ecuación general de la recta o también llamada ecuación lineal de primer grado en dos variables. Esta ecuación es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0 \qquad A, B \text{ no son simultáneamente cero.}$$

2 **Lea con atención los siguientes ejemplos.**

a) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por (1, –3) y cuya pendiente es 2.

Para iniciar se usa la ecuación punto pendiente, así:

$y - (-3) = 2(x - 1)$

$y + 3 = 2x - 2$ Eliminado paréntesis.

$y = 2x - 2 - 3$ Restando 3 en ambos lados de la igualdad.

$y = 2x - 5$ Reduciendo términos semejantes.

$2x - y - 5 = 0$ Igualando a 0 se obtiene la ecuación general.

b) Encontrar la pendiente y el y - intercepto de la recta cuya ecuación general es: $4x - y + 5 = 0$

Despejando y en $4x - y + 5 = 0$ obtenemos la ecuación $y = 4x + 5$ que nos permite concluir que la pendiente es 4 y el y-intercepto es 5.

Actividad 64

1 **Dada la recta $y = 5x - 4$.**

a) Determine la pendiente y el y - intercepto.

b) Halle la ecuación general de la recta.

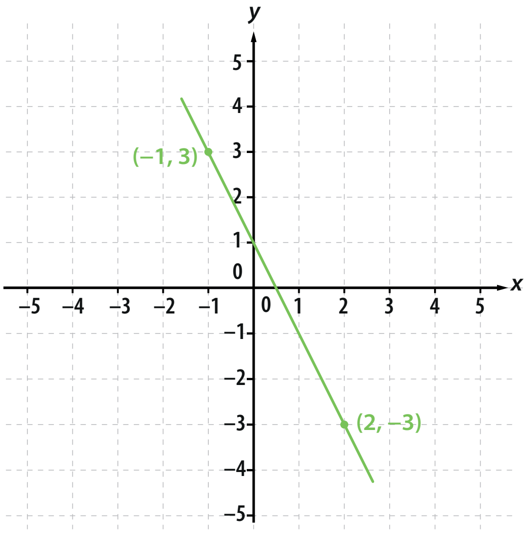
2 **La ecuación $2x - 3y - 12 = 0$ es la ecuación general de una recta.**

a) Escriba la ecuación en forma pendiente *y*-intercepto.

b) Elabore la tabla de valores de la recta del literal anterior y trace la gráfica.

x		
y		

3 **Encuentre la ecuación general de la recta que se muestra en la gráfica dada.**



Clase 24

Esta clase tiene video

Actividad 66

1 Dos rectas tienen como ecuaciones $y = 2x + 1$ y $y = 2x + 5$ respectivamente. A continuación responda las preguntas formuladas y siga las instrucciones dadas.

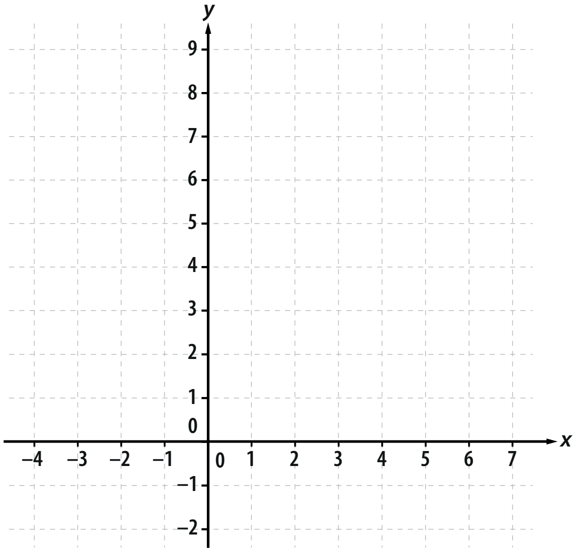
a) ¿Cómo son las pendientes de las dos rectas?

b) Complete las tablas:

$y = 2x + 1$	
x	y
1	
2	

$y = 2x + 5$	
x	y
1	
2	

c) Grafique las dos rectas sobre el siguiente plano.

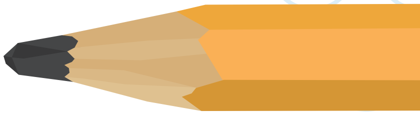


d) ¿Cómo son las dos rectas anteriores, paralelas o perpendiculares? ______________________

e) Analice las ecuaciones de las rectas, sus pendientes, sus puntos de corte con el eje y sus respectivas gráficas y escriba una conclusión que permita determinar gráfica y analíticamente cuándo dos rectas son paralelas.

2 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 1) y es paralela a la recta de ecuación $y = 4x – 3$.

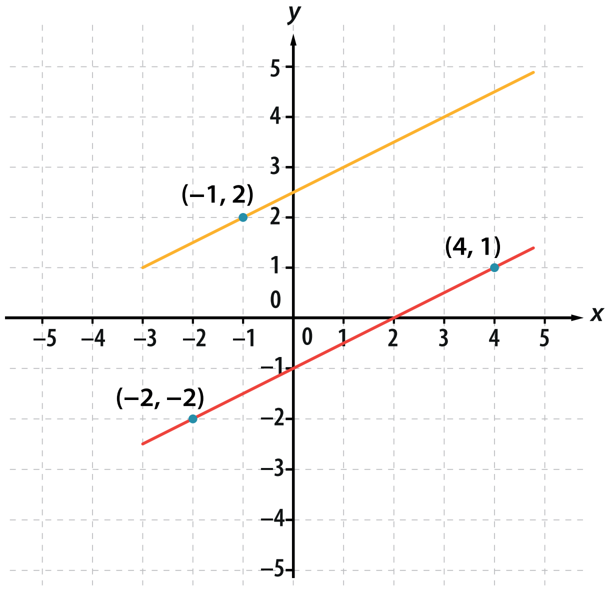
Actividad 67



Determine la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

1. **Pasa por (2, 3) y es paralela a la recta $2x - y + 3$.**

2. **Pasa por (–1, 2) y es paralela a la recta que pasa por los puntos (–2, –2) y por (4, 1) tal como se muestra en la siguiente gráfica.**

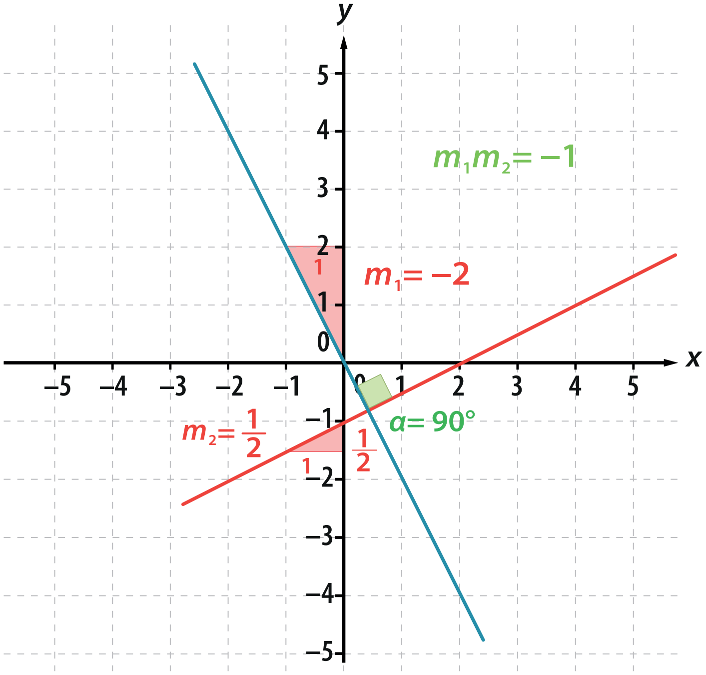


Clase 25

Actividad 68

① **Lea la siguiente información.**

Dos rectas **son perpendiculares si y sólo si** el producto de sus pendientes es igual a –1.



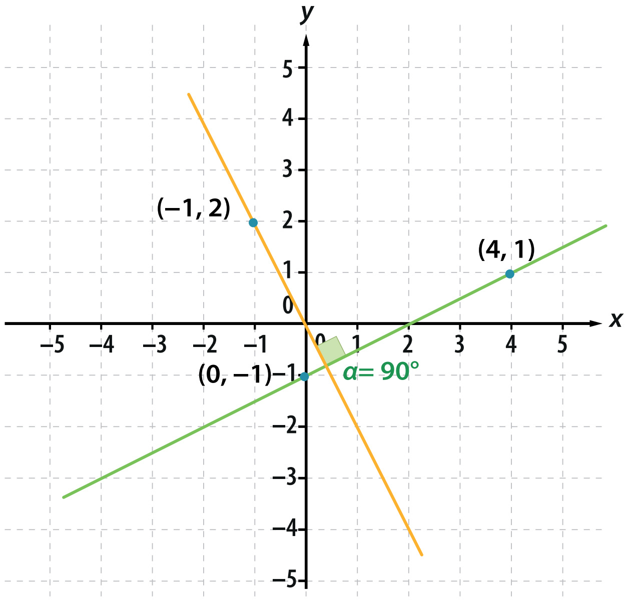
② **Encuentre la ecuación de la recta que pasa por (1, 4) y es perpendicular a la recta de ecuación $y = 2x - 3$.**

Actividad 69

Determine la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

① **Pasa por (2, 3) y es perpendicular a la recta 3*x* – *y* + 2.**

② **Pasa por (–1, 2) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (0, –1) y por (4, 1) tal como se muestra en la gráfica siguiente.**



Resumen

Ecuación de la recta

Para determinar la ecuación de una recta, se necesita conocer dos condiciones. Las dos condiciones pueden ser por ejemplo, un punto de la recta y la pendiente, la pendiente y la ordenada al origen o dos puntos por donde pasa la recta.

Veamos ahora algunas de las formas de la ecuación de la recta:

1. **Punto-Pendiente.** La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y cuya pendiente sea m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

2. **Pendiente-ordenada al origen.** La ecuación de la recta de pendiente m y que corta al eje y en el punto $(0, b)$ (siendo b la ordenada al origen) es:

$$y = mx + b$$

3. **Dos puntos.** La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ o } y - y_2 = m(x - x_2) \text{ con } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

según utilicemos el punto $P(x_1, y_1)$ o $Q(x_2, y_2)$

4. **Ecuación general.** Una ecuación lineal o de primer grado en las variables x, y es de la forma:

$$Ax + By + C = 0 \quad A, B, C \text{ son números reales.}$$

Rectas Paralelas – Rectas Perpendiculares

1. Dos rectas son **paralelas** sólo si sus pendientes son iguales.
2. Dos rectas son **perpendiculares** sólo si el producto de sus pendientes es igual a –1.

Clase 11 Esta clase tiene video

Tema: Radicación en los números reales

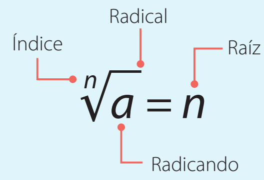
Actividad 33

1 Lea la siguiente información.

Si *n* es un número entero positivo, entonces la raíz *n*-ésima de un número real ***a*** se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ pues } b^n = a$$

Recuerde los elementos de la radicación:



2 Observe los siguientes ejemplos.

- $\sqrt[2]{0{,}25} = 0{,}5$ pues $0{,}5^2 = 0{,}25$
- $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$ pues $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$

Recuerde las siguientes propiedades de la radicación:

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

3 Escriba el resultado de cada operación. Luego, complete la tabla escribiendo como potenciación o como radicación según corresponda.

Radicación	Potenciación
$\sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} =$	
	$(1{,}4)^2 =$
$\sqrt[2]{1{,}44} =$	
	$\left(\dfrac{0{,}5}{0{,}2}\right)^4 =$

Actividad 34

Escriba las siguientes potencias usando radicales. Luego, calcule la raíz.

Recuerde que

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

1. $25^{\frac{1}{2}}$ ______________________________
2. $49^{\frac{1}{2}}$ ______________________________
3. $64^{\frac{1}{3}}$ ______________________________
4. $216^{\frac{1}{3}}$ ______________________________

Actividad 35

1. **Lea la información y observe el procedimiento.**

Lina escribió la potencia $4^{\frac{2}{3}}$ de la siguiente manera:

$$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$$

- El denominador de la fracción es el índice del radical.
- El numerador de la fracción es el exponente del radicando.

2. **Escriba las siguientes expresiones usando el proceso planteado por Lina.**

a) $3^{\frac{3}{4}}$

b) $2^{\frac{4}{5}}$

c) $(-5)^{\frac{2}{3}}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$

Actividad 36

1 **Observe la manera en la que se simplificó la expresión.**

$4^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{4^5} \longrightarrow$ Se escribe la potenciación como radicación.

$= \sqrt[3]{4^3 \times 4^2} \longrightarrow$ Se escribe el radicando como un producto de potencias.

$= \sqrt[3]{4^3} \times \sqrt[3]{4^2} \longrightarrow$ Se aplica la propiedad de la radicación para separar el producto de radicales.

$= 4 \times \sqrt[3]{16} \longrightarrow$ Se simplifica el primer radical y se resuelve la potencia en el segundo radical.

$= 4\sqrt[3]{16} \longrightarrow$ Se escribe la respuesta sin usar el símbolo de multiplicación.

Recuerde que

$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$

2 **Seleccione una expresión dentro de cada grupo y simplifíquela.**

Grupo 1
$5^{\frac{3}{2}}, 4^{\frac{5}{3}}, 3^{\frac{5}{4}}$

Grupo 2
$(-2)^{\frac{7}{5}}, (-4)^{\frac{5}{3}}, (-6)^{\frac{6}{5}}$

Grupo 3
$x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{5}{3}}, x^{\frac{5}{4}}$

Grupo 4
$(2m)^{\frac{3}{2}}, (2m)^{\frac{5}{3}}, (2m)^{\frac{5}{4}}$

3 **Cuando haya terminado la actividad anterior intercambie su guía con la de alguno de sus compañeros y siga las instrucciones:**

- **Primero.** Revise cómo simplificó su compañero las expresiones que seleccionó y determine si lo hizo correctamente.
- **Segundo.** Comente con su compañero sobre lo que observó en su revisión.
- **Tercero.** Escriba un comentario en la guía de su compañero.

Clase 12

Actividad 37

1 **Siga las instrucciones dadas en el recuadro para simplificar cada expresión.**

Instrucciones

1. Multiplique las potencias aplicando:

$$a^n \times b^m = a^{n+m}$$

Para resolver la expresión $n + m$ recuerde la adición de fracciones.

2. Escriba como radicación la potenciación que resulta.
3. Escriba el radicando como producto de potencias de igual base.
4. Aplique la propiedad

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

5. Escriba la respuesta del procedimiento.

a) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}} =$

b) $m^{\frac{4}{5}} \times m^{\frac{1}{3}} =$

c) $t^{\frac{2}{3}} \times t^{\frac{1}{2}} =$

2 **Tomás simplificó una expresión algebraica. Observe el desarrollo y escriba en frente de cada línea lo que cree que hizo Tomás.**

$x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \longrightarrow$

$x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} \longrightarrow$

$x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{8+9}{12}} \longrightarrow$

$x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{17}{12}} \longrightarrow$

$\sqrt[2]{x} + \sqrt[12]{x^{17}} \longrightarrow$

$\sqrt[2]{x} + \sqrt[12]{x^{12} \cdot x^{5}} \longrightarrow$

$\sqrt[2]{x} + \sqrt[12]{x^{12}} \cdot \sqrt[12]{x^{5}} \longrightarrow$

$\sqrt[2]{x} + x\sqrt[12]{x^{5}} \longrightarrow$

3 **Teniendo en cuenta el proceso de la actividad anterior, simplifique las siguientes expresiones y escriba la respuesta usando radicales.**

a) $m^{\frac{2}{3}} + m^{\frac{1}{4}} \cdot m^{\frac{1}{2}}$ b) $y^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{4}{3}}$ c) $w^{\frac{3}{4}} \cdot w^{\frac{2}{5}} - w^{\frac{1}{2}}$

Actividad 38

1 **El área de un cuadrado está determinada por la expresión 16*xm* unidades cuadradas. Encuentre la expresión que define la medida del lado de este cuadrado.**

2 **Analice la expresión que encontró y asigne un valor para la variable *x* y otro valor para la variable *m* de tal forma que el lado del cuadrado tenga una medida dada en los números enteros.**

Actividad 39

La relación entre el radio de una esfera y su área está dada por la expresión

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \quad ④$$

① **¿Cuánto mide el radio de una esfera cuya área es $64\pi u^2$?**

② **Si una esfera tiene área $100u^2$, ¿la medida de su radio es un número entero? Justifique su respuesta.**

④

Las fórmulas que se usan en geometría, en física o en química tienen las características de las expresiones algebraicas.

Es por esto que es posible despejar variables en estas fórmulas para dar solución a diferentes problemas.

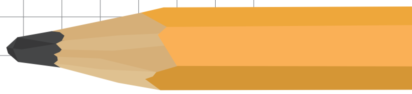
Por ejemplo, el volumen de una esfera está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

¿Qué expresión determina el radio de la esfera dado su volumen?

③ **Si una esfera tiene área $100\pi u^2$, ¿la medida de su radio es un número entero? Justifique su respuesta.**

④ **Escriba una condición para la medida del área de una esfera de tal manera que permita que la medida del radio sea un número entero.**



Clase 13

Actividad 40

Simplifique las siguientes expresiones usando las propiedades de la radicación y la potenciación.

1. $\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt{36}$

2. $\sqrt{100} \cdot \sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{-64}$

3. $25^{\frac{1}{2}} + (-27)^{\frac{1}{3}} - 81^{\frac{1}{4}}$

4. $343^{\frac{1}{3}} - 125^{\frac{1}{3}} - 512^{\frac{1}{3}}$

Actividad 41

1. **Observe el ejemplo que muestra cómo simplificar la expresión dada. Lea cuidadosamente las explicaciones.**

$(72m^3n^5x^4)^{\frac{1}{3}} = \longrightarrow$ Expresión dada para simplificar.

$\sqrt[3]{72m^3n^5x^4} = \longrightarrow$ Se escribe la potencia como un radical de índice 3.

$\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2 \cdot m^3 \cdot n^3 \cdot n^2 \cdot x^3 \cdot x^1} = \longrightarrow$ Se descompone cada uno de los factores del radicando en potencias que tengan exponente 3. Esto se hace para poder simplificar los radicales.

$2 \cdot m \cdot n \cdot x \cdot \sqrt[3]{3^2 \cdot n^2 \cdot x^1} = \longrightarrow$ Se aplica la propiedad $\sqrt[m]{a^m} = a$ para sacar del radical los factores 2, *m*, *n* y *x*.

$2mnx\sqrt[3]{9n^2x} \longrightarrow$ Se escribe la respuesta de la simplificación.

Tenga en cuenta que en la simplificación anterior se están aplicando propiedades de la radicación y de la potenciación.

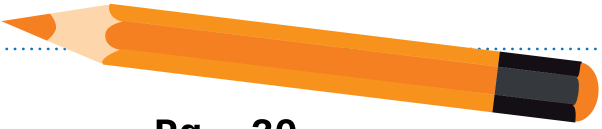
2 **Simplifique las expresiones teniendo en cuenta la explicación dada en en punto 1 de esta Actividad.**

a) $(405t^5h^4w^6)^{\frac{1}{4}}$

b) $(1008a^4b^6c^5)^{\frac{1}{2}}$

c) $(54x^3y^2z^5)^{\frac{1}{3}}$

d) $(2ab^2c^3)^{\frac{3}{2}}$



Clase 14

Actividad 42

Escriba, en cada fila de la tabla, un radical semejante y un radical no semejante. ⑤

Radical	Radical semejante	Radical no semejante
$-5\sqrt{2a}$		
$\sqrt[7]{3mn}$		
$\dfrac{\sqrt{x^3y}}{2}$		
$\sqrt{16m^4n^2}$		

⑤

Dos o más radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Por ejemplo,

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{4x}\,,\ 0{,}5\sqrt[3]{4x}\,,\ 3\sqrt[3]{4x}$$

son radicales semejantes.

¿Podría afirmar que para que dos radicales sean semejantes solo deben diferir en el coeficiente? Explique su respuesta.

Actividad 43

① **Observe el proceso para escribir los dos radicales dados como radicales semejantes.**

$\sqrt{75x^3a^3}$ y $\sqrt{108x^5a^3}$

Primero se simplifica $\sqrt{75x^3a^3}$

$$\sqrt{75x^3a^3} = \sqrt{5^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x \cdot a^2 \cdot a} = 5xa\sqrt{3xa}$$

Luego, se simplifica $\sqrt{108x^5a^3}$

$$\sqrt{108x^5a^3} = \sqrt{6^2 \cdot 3x^4 \cdot x \cdot a^2 \cdot a} = 6x^2a\sqrt{3xa}$$

Los radicales son semejantes; observe la conclusión.

$$5xa\sqrt{3xa} \text{ y } 6x^2a\sqrt{3xa}$$

El índice y el radicando son iguales

No olvide usar la descomposición en factores primos para calcular la raíz de los coeficientes.

2 **Escriba cada pareja de radicales como semejantes.**

a) $\sqrt{48x^3y^3z^3}$, $\sqrt{108a^2x^3yz}$

b) $\sqrt[3]{54m^4n}$, $\sqrt[3]{250a^3nm}$

3 **Determine en cada grupo de radicales el que no es semejante a los otros.**

$\sqrt{48}$
$\sqrt{27}$ $\sqrt{75}$
$\sqrt{14}$

$5\sqrt{2m^3}$
$\sqrt{18m^3}$ $\sqrt{12m^3}$
$2m\sqrt{2m}$

Clase 15

Actividad 44

1 Observe el ejemplo y analice el proceso. ⑥
Realizar las operaciones indicadas en la siguiente expresión:

$$-2\sqrt{54} + 7\sqrt{24} - 3\sqrt{150}$$

$-2\sqrt{54} = -6\sqrt{6}$
$+7\sqrt{24} = +14\sqrt{6}$
$-3\sqrt{150} = -15\sqrt{6}$

Se reducen todos los radicales a radicales semejantes.

$2\sqrt{54} + 7\sqrt{24} - 3\sqrt{150}$
$= -6\sqrt{6} + 14\sqrt{6} - 15\sqrt{6}$
$= -7\sqrt{6}$

Se reescribe la expresión usando radicales semejantes.

Se reducen (suman o restan) los radicales semejantes.

⑥

Para sumar o restar radicales se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Deben ser semejantes, así que primero hay que simplificarlos.
- Al sumarlos o restarlos, solamente se operan los coeficientes y el resultado va acompañado del respectivo radical semejante.

¿Qué similitudes tiene este proceso con la reducción de expresiones algebraicas?

2 Realice las operaciones indicadas.

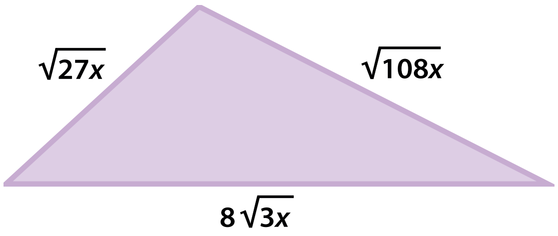
a) $\frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

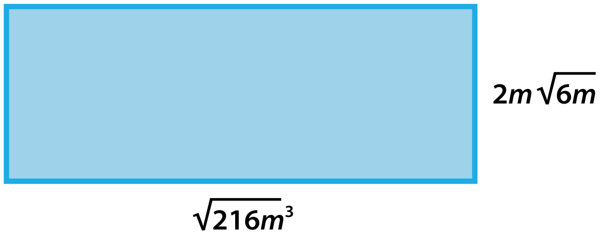
b) $5\sqrt{450} - 5\sqrt{800} - 2\sqrt{320}$

c) $-3\sqrt{2ab^2} + 12\sqrt{18a^3} - 5b\sqrt{2a} - \sqrt{2a^3}$

d) $2a\sqrt[3]{81y} - a\sqrt[3]{24y} + 5a\sqrt[3]{192y}$

3 **Halle el perímetro de las siguientes figuras**





Actividad 45

Tenga en cuenta que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ para realizar las siguientes operaciones.

1 $-3\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)$

2 $\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)$

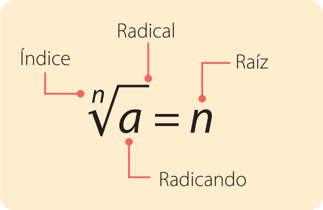
3 $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

Resumen

- **La radicación y la potenciación** son operaciones que se relacionan pues

$$\sqrt[n]{a}=b \quad \text{equivale a} \quad b^n=a$$

- **Los elementos de la radicación** se muestran en el siguiente esquema:



Algunos autores llaman al radicando cantidad subradical.

- Toda expresión que tenga un exponente fraccionario puede ser escrita como un radical pues:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

El denominador de la fracción es el índice de la raíz y el numerador es el exponente del radicando.

- **Un radical está simplificado** si los exponentes de los factores que están en el radicando no pueden ser números mayores o iguales al índice de la raíz.

Por ejemplo la expresión $3\sqrt{2xy}$ está simplificada, mientras que la expresión $3\sqrt{4x^3y^2}$ no está simplificada.

- **Dos o más radicales son semejantes** si tienen el mismo índice y la misma expresión en el radicando; dichos radicales solo pueden diferir en el coeficiente.

Por ejemplo, $4\sqrt{xy}$ y $-0,3\sqrt{xy}$ son radicales semejantes.

Para determinar si dos radicales son semejantes es necesario simplificarlos y verificar la condición anterior.

- **La adición y la sustracción de radicales** se realiza teniendo en cuenta que estos deben ser semejantes. El proceso es similar a la reducción de términos semejantes estudiado en la adición y sustracción de expresiones algebraicas.

- **Para multiplicar y dividir radicales del mismo índice** se usan las propiedades de la radicación:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Clase 16 Esta clase tiene video

Tema: Racionalización de expresiones

Actividad 46

1 **Lea la siguiente información sobre la racionalización.**

En matemáticas es común encontrarnos con **expresiones racionales** que contienen uno o varios radicales en el denominador. Para poder trabajar con ellas, es necesario aplicar un procedimiento llamado **racionalización**.

En la racionalización, se multiplica la expresión dada por otra que permite hallar una expresión equivalente que no contiene radicales en el denominador.

A continuación se presentan algunos casos de expresiones para racionalizar.

Tipo 1. Racionalización de fracciones con denominadores monomios que contienen raíces cuadradas.

$$\frac{c}{\sqrt{a}} \text{ se multiplica por } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

Tipo 2. Racionalización de fracciones con denominadores que contienen raíces de orden superior.

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a}} \text{ se multiplica por } \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

Tipo 3. Racionalización de fracciones con denominadores binomios que contienen raíces cuadradas.

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \text{ se multiplica por } \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

2 **Escriba tres expresiones algebraicas, que ejemplifiquen los tres tipos de expresiones para racionalizar.**

- Tipo 1. $\frac{c}{\sqrt{a}}$
- Tipo 2. $\frac{c}{\sqrt[n]{a}}$
- Tipo 3. $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Actividad 47

Encuentre el factor que permitiría eliminar la raíz dada en cada caso. Justifique su respuesta.

1. $\sqrt{3}$

2. $\sqrt[3]{a}$

3. $7\sqrt{2}$

4. $\sqrt{a-c}$

Actividad 48

1. **Observe los ejemplos dados.** ⑦

Ejemplo 1. Racionalice el denominador de la expresión $\frac{9}{\sqrt{7}}$

$$\frac{9}{\sqrt{7}} = \frac{9}{\sqrt{7}}\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{9\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{9\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

Ejemplo 2. Encuentre una expresión equivalente a $\frac{4}{11\sqrt{13}}$ que no tenga radicales en el denominador.

$$\frac{4}{11\sqrt{13}} = \frac{4}{11\sqrt{13}}\ \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{11\sqrt{13^2}} = \frac{4\sqrt{13}}{11 \times 13} = \frac{4\sqrt{13}}{143}$$

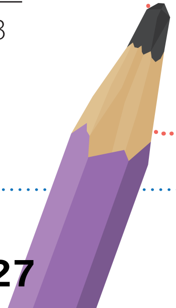
⑦

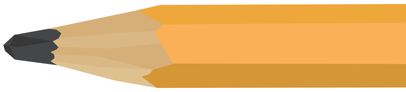
En el primer ejemplo se multiplicó el numerador y el denominador por $\sqrt{7}$.

a) Explique la razón de la elección de este factor.

En el segundo ejemplo se multiplicó el numerador y el denominador por $\sqrt{13}$.

b) Explique la razón de la elección de este factor.





2 **Racionalice cada una de las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{8-\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$

3 **Escriba en los recuadros los números correspondientes para que la expresión quede racionalizada. Realice los procesos correspondientes.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}} =$

b) $\dfrac{-3}{12\sqrt{2}} = \dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} = \dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}} =$

d) $\dfrac{10\sqrt{13}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}} =$

Clase 17

Actividad 49

1 **Analice los ejemplos y racionalice las expresiones dadas. Para el segundo ejemplo, escriba las justificaciones de los procesos realizados.**

Ejemplo 1. Encuentre una expresión equivalente a $\frac{12}{\sqrt[5]{8}}$ que no tenga raíz en el denominador.

$$\frac{12}{\sqrt[5]{8}} = \frac{12}{\sqrt[5]{8}} \frac{\sqrt[5]{8^{5-1}}}{\sqrt[5]{8^{5-1}}} \longrightarrow$$ Para racionalizar la expresión $\frac{c}{\sqrt[n]{a}}$ se multiplica por $\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$

$$= \frac{12}{\sqrt[5]{8}} \frac{\sqrt[5]{8^4}}{\sqrt[5]{8^4}} \longrightarrow$$ Se efectúan las restas.

$$= \frac{12\sqrt[5]{8^4}}{\sqrt[5]{8^5}} \longrightarrow$$ Se aplican propiedades de la radicación.

$$= \frac{12\sqrt[5]{8^4}}{8} \longrightarrow$$ Se simplifica el radical.

$$= \frac{3\sqrt[5]{8^4}}{2} \longrightarrow$$ Se simplifica la expresión y se deja racionalizada.

Ejemplo 2. Racionalice la expresión $\frac{2}{7\sqrt[3]{9^2}}$

$$\frac{2}{7\sqrt[3]{9^2}} = \frac{2}{7\sqrt[3]{9^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9^{3-2}}}{\sqrt[3]{9^{3-2}}} \longrightarrow$$ ______________________________

$$= \frac{2}{7\sqrt[3]{9^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} \longrightarrow$$ ______________________________

$$= \frac{2\sqrt[3]{9}}{7\sqrt[3]{9^3}} \longrightarrow$$ ______________________________

$$= \frac{2\sqrt[3]{9}}{7 \cdot 9} \longrightarrow$$ ______________________________

$$= \frac{2\sqrt[3]{9}}{63} \longrightarrow$$ ______________________________

2 **Racionalice las siguientes expresiones.**

a) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[5]{7}}$

c) $\dfrac{6}{11\sqrt[6]{12}}$

d) $\dfrac{\sqrt[7]{9}}{8\sqrt[7]{4}}$

③ Escriba V si la proposición es verdadera o F si la proposición es falsa.

☐ a) Racionalizar significa eliminar todos los radicales de una expresión dada.

☐ b) Sólo las expresiones que contienen radicales de índice 2 se pueden racionalizar.

☐ c) El factor que permite racionalizar una expresión es otra raíz del mismo índice.

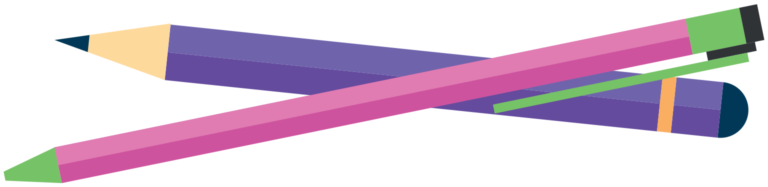
☐ d) La expresión $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ es equivalente a $\sqrt{5}$

☐ e) El factor que permite racionalizar $\dfrac{9}{4\sqrt{11}}$ es $\sqrt{11}$.

☐ f) Para racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$ basta multiplicar por $\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a}}$

☐ g) Para eliminar la raíz en la expresión $7\sqrt[4]{2}$ se multiplica por $\sqrt[4]{2^3}$

④ El periodo *T* de un péndulo de longitud *l* está dado por la expresión $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ donde *g* es la aceleración de la gravedad de valor $g = 10\ m/s^2$. Teniendo en cuenta esto, ¿cuál es el periodo del péndulo de 2*m*? De su respuesta en forma racionalizada.



Clase 18

Tema: Racionalización de denominadores binomiales

Actividad 50

1 Lea la siguiente información.

Para racionalizar denominadores binomiales de la forma

$$\sqrt{a}-b\,,\ \sqrt{a}+b\,,\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\ \text{ y }\ \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

tenga en cuenta las siguientes indicaciones:

- Primero, multiplique numerador y denominador de la expresión racional dada por el conjugado del denominador.
- Luego, utilice el producto notable de la suma por diferencia:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

- Finalmente, efectúe las operaciones indicadas y simplifique si es posible. 8

8

Para escribir el conjugado del binomio $a+b$ solamente se debe cambiar el signo del segundo término.

Así el conjugado de $a+b$ es $a-b$.

¿Cuál es el conjugado de la expresión $\sqrt{a}-\sqrt{b}$?

____

____

____

2 Observe los ejemplos en los que se racionalizó cada expresión.

Ejemplo 1

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2}=\frac{1}{(\sqrt{3}-2)}\,\frac{(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}+2)}\longrightarrow$$

Se multiplicó por la conjugada del denominador.

$$=\frac{(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3})^2-2^2}\longrightarrow$$

Se resolvió el producto notable en el denominador.

$$=\frac{(\sqrt{3}+2)}{3-4}\longrightarrow$$

Se multiplicó por 1 en el numerador y se simplificó el radical en el denominador.

$$=\frac{(\sqrt{3}+2)}{-1}\longrightarrow$$

Se resolvieron las operaciones en el denominador.

$$=-\sqrt{3}-2\longrightarrow$$

La expresión quedó racionalizada.

Ejemplo 2

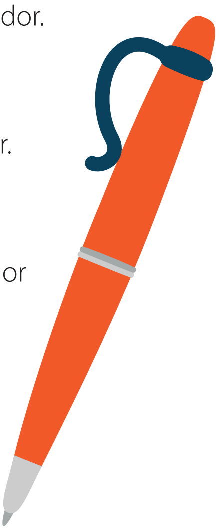
$$\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{8}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}$$ → Se multiplicó por la conjugada del denominador.

$$= \frac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$ → Se resolvió el producto notable en el denominador.

$$= \frac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5}$$ → Se simplificaron los radicales en el denominador.

$$= \frac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}$$ → Se resolvieron las operaciones en el denominador

$$= 4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$$ → La expresión quedó racionalizada.



Actividad 51

Racionalice en cada caso el denominador.

① $\frac{7}{10-\sqrt{3}}$

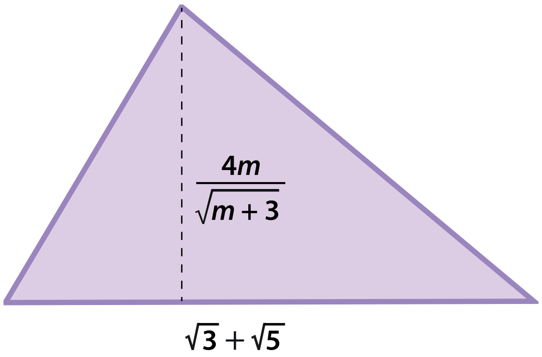
② $\frac{17}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

③ $\frac{-1}{\sqrt{2}-4}$

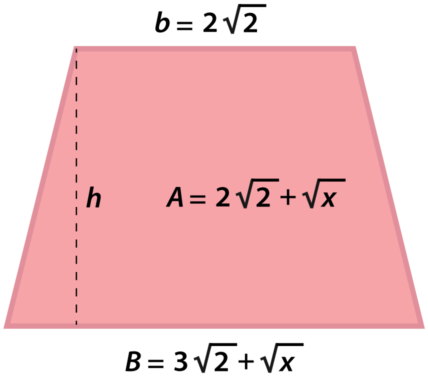
④ $\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$

Actividad 52

1 **Calcule el área del triángulo de la figura y racionalice el resultado que obtenga.**



2 **En la figura se observa un trapecio con base mayor *B*, base menor *b* y área *A*. ¿Qué expresión determina la altura *h* del trapecio? Racionalice el resultado.**



Clase 19

Actividad 53

1 **Lea con atención las siguientes situaciones y vaya completando la información pedida.** **9**

Situación 1

Si le piden solucionar la ecuación $x^2 - 4 = 0$, posiblemente se podría preguntar, ¿cuánto debe valer x^2 para que al restarle 4 el resultado sea 0?

- Escriba su respuesta
- ¿Qué valores puede tomar x?
- ¿Los valores que pueden tomar x son números reales?
- ¿Se podría decir entonces, que la ecuación $x^2 - 4 = 0$ tiene solución en los números Reales?

9

Recuerde el proceso de solución de la ecuación:

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - a + a = a$$

$$x^2 = a$$

$$x = \pm\sqrt{a}$$

No olvide que todo número real elevado al cuadrado da como resultado un número real positivo o cero.

- Escriba dos ejemplos numéricos que muestren la afirmación anterior.

Situación 2

Si ahora le piden solucionar la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y se pregunta ¿cuánto debe valer x^2 para que al sumarle 1 el resultado sea 0? Su respuesta sería $x^2 = -1$. Pero surge otra pregunta.

- ¿Qué número real elevado al cuadrado es igual a –1? Escriba su respuesta y justifíquela.

Entonces, ¿cuáles son los números que elevados al cuadrado dan –1? Al despejar x de la ecuación, fácilmente se concluye que

$$x = \sqrt{-1}\text{, o } x = -\sqrt{-1}$$

Así que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en los reales porque $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ no son números reales.

2 **Lea la siguiente conclusión planteada a partir del análisis de las dos situaciones anteriores.**

A los nuevos números que surgen de la situación 2 y que no son números reales, se les denomina **números imaginarios**.

Al número imaginario $\sqrt{-1}$ se le llama unidad imaginaria y se representa con la letra *i*.

$$i = \sqrt{-1}$$

Actividad 54

1 **Observe el ejemplo. Luego, exprese los números imaginarios de la forma b*i*, donde b es un número real.**

$$\begin{aligned}\sqrt{-9} &= \sqrt{9(-1)}\\ &= \sqrt{9}\,\sqrt{-1}\\ &= 3i\end{aligned}$$

Al número 3*i* se le llama número imaginario.

a) $\sqrt{-4}$

b) $\sqrt{-100}$

c) $\sqrt{-5}$

d) $\sqrt{-\frac{4}{25}}$

e) $\sqrt{-x^2}$

f) $\sqrt{-\frac{100}{121}}$

2 **Efectúe las siguientes adiciones.**

a) $\sqrt{-9} + \sqrt{-16} =$

b) $\sqrt{-1} + \sqrt{-25} + \sqrt{-36} =$

c) $\sqrt{-121} + \sqrt{-144} + \sqrt{-64} =$

d) $2\sqrt{-1} + 3\sqrt{-16} + 4\sqrt{-100} =$

Actividad 55

1 **Lea la siguiente información y luego resuelva.**

a) Las potencias básicas de *i* son:

$i^1 = i$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i^3 = -i$ $\quad i^4 = 1$

b) Observe como se encuentran las dos primeras potencias de *i*.

- $i^1 = \sqrt{-1} = i$
- $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$

c) Halle la tercera y la cuarta potencia de i.

- $i^3 =$ ______________________________
- $i^4 =$ ______________________________

2 **Calcule las siguientes potencias de *i*.**

a) i^5

b) i^6

c) i^7

d) i^8

3 **Compare los resultados obtenidos al calcular las 8 primeras potencias de *i* y escriba una conclusión al respecto.**

Clase 20

Actividad 56

1 Para calcular diferentes potencias de *i* se puede seguir el procedimiento presentado para i^{22}, así:

Primero se divide 22 entre 4 (pues cada cuatro veces la potencia de *i* se repite)

$$\begin{array}{r|l} 22 & 4 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

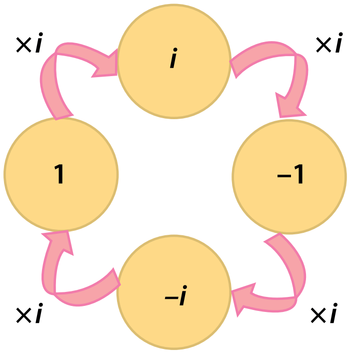
Luego, se interpreta el resultado obtenido. Es decir:

- El cociente **5** significa que se repiten cinco veces las cuatro primeras potencias de *i* .
- El residuo **2** significa que el resultado de esta potencia (i^{22}) es la segunda potencia de *i* .

En conclusión $i^{22} = -1$ ⑩

⑩

- Si el residuo es 1, será la primera potencia de *i*.
- Si el residuo es 2, será la segunda potencia de *i*.
- Si el residuo es 3, será la tercera potencia de *i*.
- ¿Qué potencia de *i* se debe usar si el residuo de la división es 0?



2 Calcule la siguientes potencias de i.

a) i^{27}

b) i^{49}

c) i^{78}

d) i^{44}

e) i^{232}

Resumen

Racionalización

Racionalizar una expresión fraccionaria es establecer una nueva expresión, equivalente a la inicial, en la que el denominador no cuenta con radicales.

Caso 1: **Un sólo radical de índice dos en el denominador**.

$$\frac{c}{\sqrt{a}}=\frac{c}{\sqrt{a}}\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}}=\frac{c\sqrt{a}}{a}$$

Caso 2: **Con un radical de índice cualquiera en el denominador**.

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}=\frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

Caso 3: **Racionalización de binomios irracionales de índice 2**.

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\,\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Números imaginarios

¿La ecuación $x^2+1=0$ tiene solución en el sistema de los números Reales?

Si se despeja x en la ecuación dada, se tiene que $x^2=-1$.

¿Existe un número Real que elevado al cuadrado sea igual a –1? No, porque todo Real elevado al cuadrado es igual a un número real positivo o cero. Por consiguiente, al despejar x en la última ecuación se obtiene $x=\sqrt{-1}$, o $x=-\sqrt{-1}$, que no son números Reales, razón por la cual los matemáticos crearon un nuevo conjunto llamado conjunto de los números imaginarios y definieron la unidad imaginaria.

$i^1=\sqrt{-1}$ se llama la unidad imaginaria, de donde $i^2=-1$

En el caso de la ecuación $x^2+9=0$, al despejar x se obtiene que:

$$x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9(-1)}=\pm\sqrt{9}\sqrt{-1}=\pm 3i$$

En general:

Si a es un número real y $a>0$, se tiene que $\sqrt{-a}$ es un número imaginario puro y

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i=bi,\ \text{donde}\ b=\sqrt{a}$$

Para calcular cualquier potencia de i tener en cuenta que:

$$i=\sqrt{-1}\qquad i^2=-1\qquad i^3=i^2i=(-1)i=-i\qquad i^4=i^2i^2=(-1)(-1)=1$$

Clase 21 Esta clase tiene video

Tema: Razón y proporción

Actividad 57

① **Lea el siguiente texto.**

Hombre de Vitruvio es una ilustración realizada originalmente por Leonardo da Vinci que presenta un estudio de las proporciones ideales del cuerpo humano; estas fueron realizadas a partir de textos de arquitectura de la antigua Roma.

El Hombre de Vitruvio es una figura masculina que está en dos posiciones sobrepuestas e inscrita en un cuadrado y en un círculo respectivamente.

Algunas de las proporciones que se observan en el Hombre de Vitruvio son las siguientes:

- El rostro, desde la barbilla hasta la parte más alta de la frente, donde están las raíces del pelo, mide una décima parte de la altura total.
- La palma de la mano, desde la muñeca hasta el extremo del dedo medio, mide exactamente lo mismo.
- La cabeza, desde la barbilla hasta su coronilla, mide la octava parte de todo el cuerpo.
- Desde el esternón hasta las raíces del pelo equivale a una sexta parte de todo el cuerpo.
- Desde la parte media del pecho hasta la coronilla, equivale a una cuarta parte de todo el cuerpo.
- Del mentón hasta la base de la nariz, mide una tercera parte del rostro.
- La frente mide igualmente otra tercera parte del rostro.
- El pie equivale a un sexto de la altura del cuerpo.
- El codo equivale a una cuarta parte de todo el cuerpo.
- El pecho equivale igualmente a una cuarta parte de todo el cuerpo.

② **Escriba la medida de su estatura y verifique si su cuerpo cumple alguna de las 10 condiciones que cumple la obra el Hombre de Vitruvio.**

Actividad 58

① **Lea los siguientes ejemplos en los cuales se usa el planteamiento de razones y proporciones. ⑪**

Ejemplo 1. Un atleta recorre 38 km en dos horas, la razón entre la distancia recorrida y el tiempo que gastó en recorrerla es la siguiente:

$$\frac{38\ km}{2\ h} = 19\ km/h$$

El atleta recorrió la distancia mencionada a razón de 19 kilómetros por hora.

Ejemplo 2. En una fiesta la razón entre el número de mujeres y el número de invitados es $\frac{3}{7}$.

¿Cuántas mujeres hay si el número de invitados es 42?

Al plantear la proporción se obtiene:

$$\frac{\#\ mujeres}{\#\ invitados} = \frac{x}{42} = \frac{3}{7}$$

Al aplicar el teorema fundamental de las proporciones se puede afirmar que:

$$7x = 42 \times 3$$

$$x = \frac{126}{7} = 18$$

El número de mujeres en la fiesta es de 18.

⑪

- Una **razón** es el cociente entre dos números o dos cantidades comparables entre sí.

  La razón entre a y b, se lee "a es a b" y se puede escribir de dos maneras:

  $$a : b \text{ o } \frac{a}{b}$$

- Una **proporción** es la igualdad entre dos razones. Se escribe

  $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

  y se lee: "a es a b como c es a d"

- El **teorema fundamental de las proporciones** es el siguiente:

  Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \cdot d = b \cdot c$

② **En cada caso, verifique si la igualdad es una proporción o no.**

a) $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

c) $\frac{4}{3} = \frac{5}{3}$

d) $\frac{24}{44} = \frac{6}{11}$

Actividad 59

En las siguientes proporciones, encuentre el término que falta.

① $\frac{14}{21} = \frac{x}{6}$

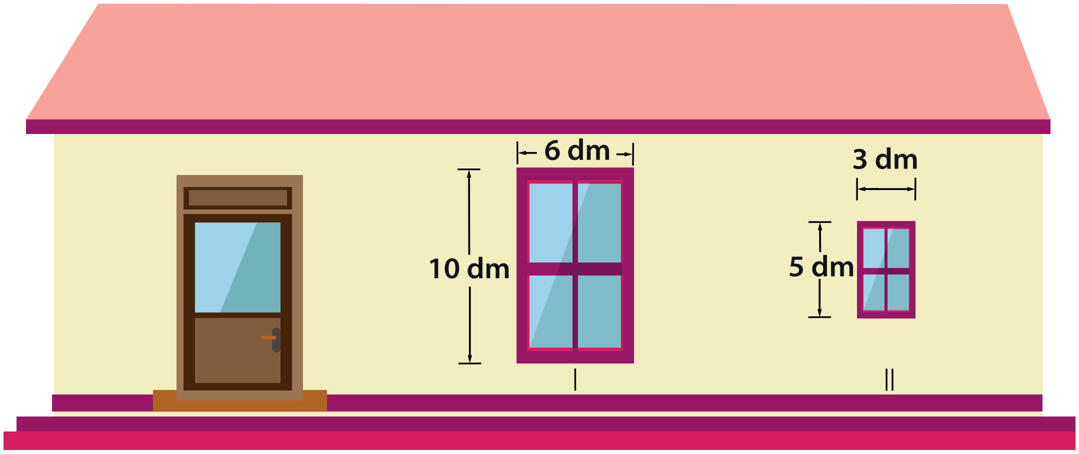
② $\frac{15}{x} = \frac{5}{9}$

③ $\frac{x}{44} = \frac{6}{12}$

④ $\frac{18}{12} = \frac{12}{x}$

Actividad 60

En la siguiente casa hay diferentes tipos de ventanas. Determine la razón entre las medidas del ancho y el alto de las dos ventanas.



Clase 22

Tema: Polígonos semejantes

Actividad 61

1 **Lea la siguiente información.**

Cuando la esposa favorita del emperador Shah Jahan murió en 1631, él lloró su pérdida y levantó en su honor el Taj Mahal en la India, uno de los monumentos más bellos del mundo.

Cuatro siglos después, otro indio construyó una réplica del famoso mausoleo para su esposa fallecida. Faizul Hasan Quadri, de 80 años, levantó una sencilla réplica del Taj Mahal por su cuenta. Estas dos construcciones no son iguales, pues sus dimensiones son diferentes, pero conservan características similares relativas a la forma por lo cual se podrían llamar **semejantes**.

Taj Mahal

Réplica del Taj Mahal

Imagen tomada de: http://www.bbc.com/news/world-asia-india-23339485

2 **Observe las imágenes y explique por qué se puede hablar de semejanza.**

a)

b)

Torre Eiffel

____

____

____

Machu Picchu

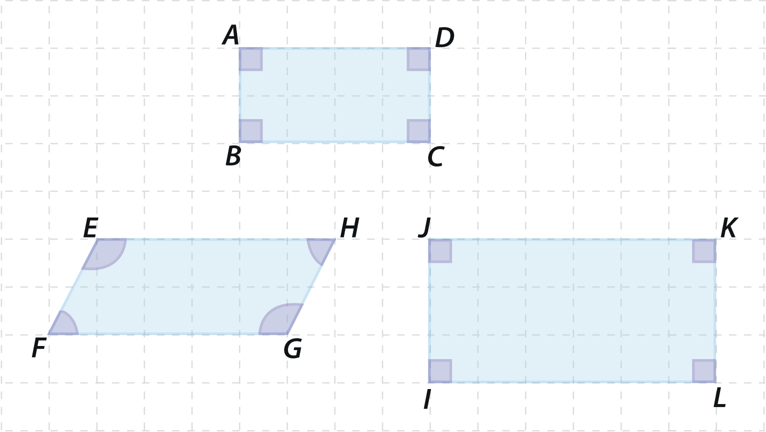
____

____

____

Actividad 62

① Observe la manera en la que se justificó la semejanza entre dos de los polígonos. ⑫



⑫

Dos polígonos son **semejantes** cuando tienen los ángulos correspondientes congruentes y los segmentos correspondientes son proporcionales.

¿Es posible afirmar que si los segmentos son correspondientes es porque la razón entre ellos es igual a una constante?

Explique su respuesta.

Primero se verifica que los polígonos tienen la misma forma y ya que son cuadriláteros es posible continuar.

Ya que *ABCD* es un rectángulo, se puede comprobar que sus ángulos correspondientes son congruentes a los de la figura *IJKL*, pero no a los del cuadrilátero *EFGH*.

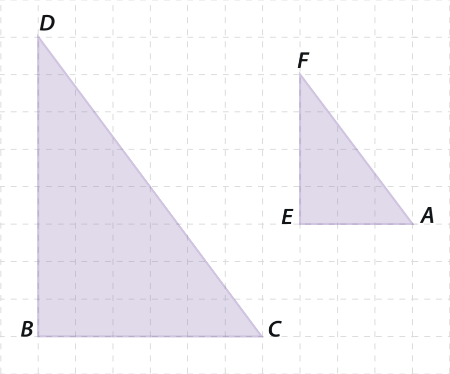
Al calcular la razón entre los lados correspondientes se obtiene:

$$\frac{IJ}{AB} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{IL}{BC} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \qquad \frac{LK}{CD} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{KJ}{DA} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

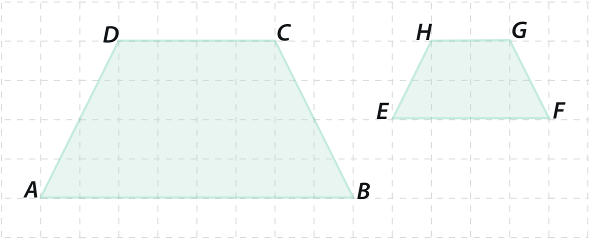
Además de tener la misma forma y ángulos correspondientes congruentes, la razón entre la medida de los lados correspondientes es una constante. A esta constante se le llama **razón de semejanza**.

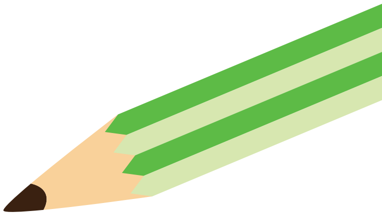
② Para cada pareja de polígonos semejantes, calcule la razón de semejanza.

a)



b)





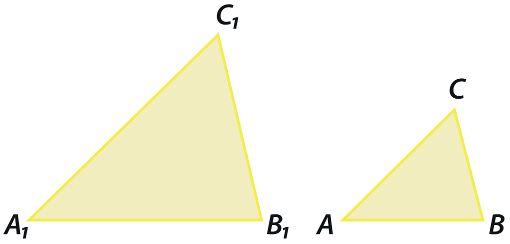
Clase 23 Esta clase tiene video

Tema: Criterios de semejanza de triángulos

Actividad 63

Observe atentamente el siguiente ejemplo en el que se establece la semejanza entre los siguientes triángulos. ⑬

Se sabe que: $\angle A = 45°$ $\angle C = 60°$ $\angle A' = 45°$ $\angle B' = 75°$



$\angle B = 180° - (45° + 60°) = 180° - 105° = 75°$

$\angle C_1 = 180° - (45° + 75°) = 180° - 120° = 60°$

Así, los dos triángulos tienen ángulos correspondientes congruentes.

$$\angle A \cong \angle A_1 ; \angle B \cong \angle B_1 ; \angle C \cong \angle C_1$$

En virtud del primer criterio de semejanza de triángulos (AAA), se puede afirmar que $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

⑬

Criterio (AAA) de semejanza de triángulos

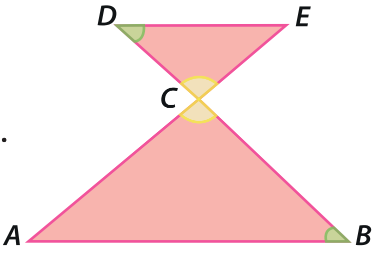
Dos triángulos son **semejantes** si dos ángulos correspondientes son congruentes.

- Construya un triángulo equilátero de cualquier medida.

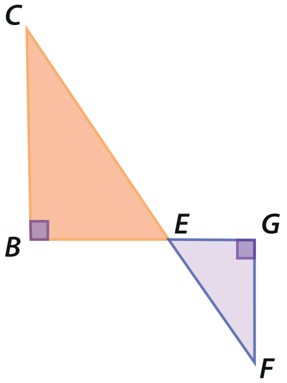
  Compare su construcción con la de un compañero. ¿Qué puede concluir respecto a los dos triángulos?

Actividad 64

① **En la figura $AB \parallel DE$, determine si los triángulos ΔABC y ΔCDE son semejantes.**



② **Determine si los siguientes triángulos rectángulos son semejantes. Justifique su respuesta.**



Actividad 65

Escriba verdadero (V) o falso (F) en cada afirmación. Justifique su respuesta.

☐ 1 Dos triángulos isósceles son siempre semejantes.

☐ 2 Dos triángulos escalenos nunca son semejantes.

☐ 3 Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

☐ 4 Dos triángulos rectángulos son siempre semejantes.

Actividad 66

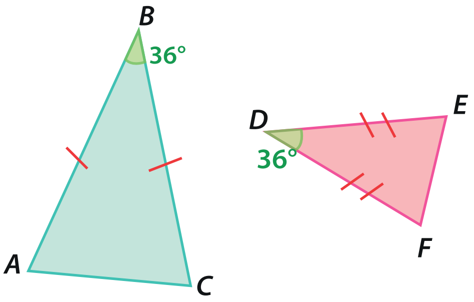
Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, determine en qué caso serán triángulos semejantes. Justifique su respuesta y dibuje los triángulos correspondientes.

1 $\angle A = 42°$ $\angle B = 60°$
$\angle A' = 42°$ $\angle C' = 78°$

2 $\angle A = 50°$ $\angle B = 60°$
$\angle A' = 50°$ $\angle C' = 90°$

Actividad 67

Los siguientes triángulos son isósceles. Determine si son semejantes y establezca la correspondencia.



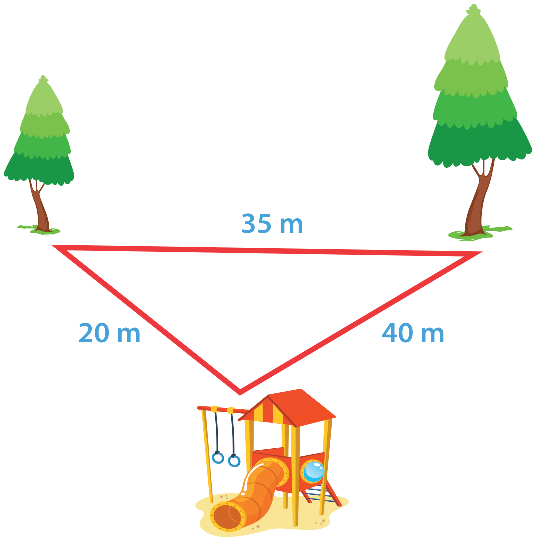
Clase 24

Tema: Teoremas de semejanza de triángulos

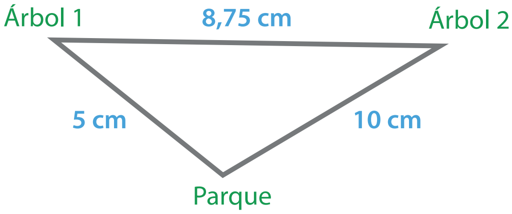
Actividad 68

1 Observe cómo se identificaron los triángulos semejantes en la siguiente situación.

Se va a poner un parque a 20 metros de un árbol y 40 metros de otro. Los árboles están separados entre sí 35 metros.



El ingeniero que va a hacer la obra diseñó el siguiente plano.



¿Es correcto el plano dibujado?

Para poder identificar si el plano está bien elaborado se debe determinar que el triángulo que se ve en la imagen y el triángulo del plano son semejantes.

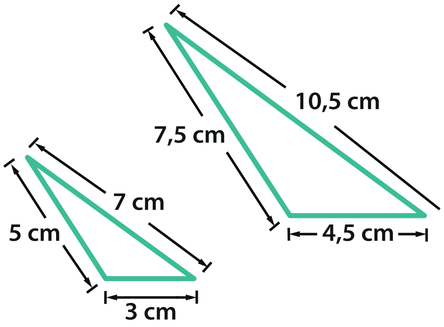
Para ello, se van a calcular las razones entre los lados correspondientes, así:

$$\frac{8,75}{35} = 0,25\ ;\ \frac{5}{20} = 0,25\ ;\ \frac{10}{40} = 0,25\ ;$$

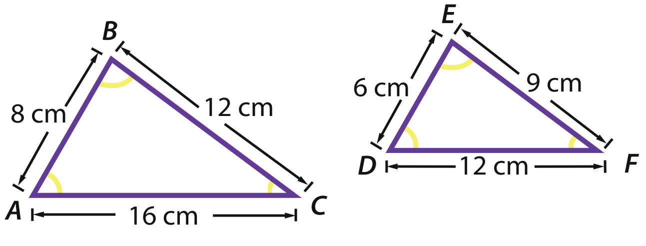
Como las razones son iguales, se puede establecer que los segmentos correspondientes son proporcionales, así que los dos triángulos son semejantes y en conclusión, el ingeniero elaboró correctamente el plano.

2 Utilice el criterio LLL para determinar si los triángulos dados son semejantes.

a)



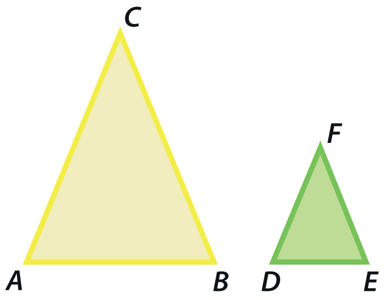
b)



Actividad 69

1 **Lea el criterio de semejanza LAL.**

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y los ángulos comprendidos entre cada pareja de estos lados son congruentes.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

$$\angle A \cong \angle D$$

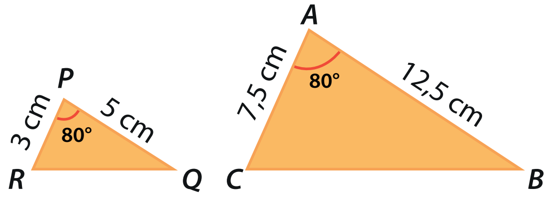
$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

El símbolo ≅ se lee congruente.

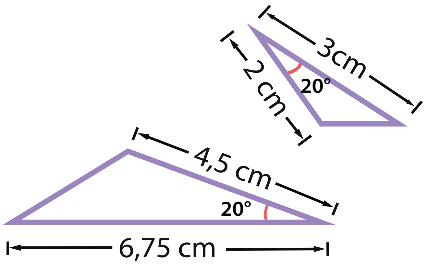
El símbolo ~ se lee semejante.

2 **Utilice el criterio LAL para verificar que los triángulos dados son semejantes. En caso que los triángulos no sean semejantes justifique su respuesta.**

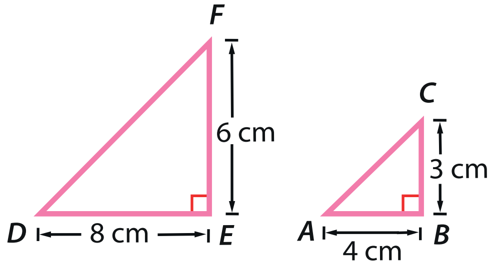
a)



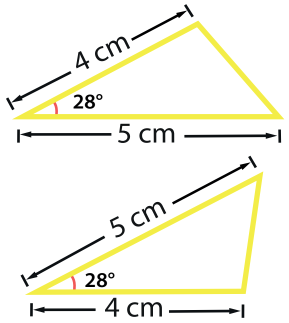
b)



c)



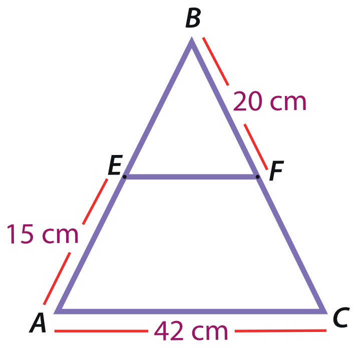
d)



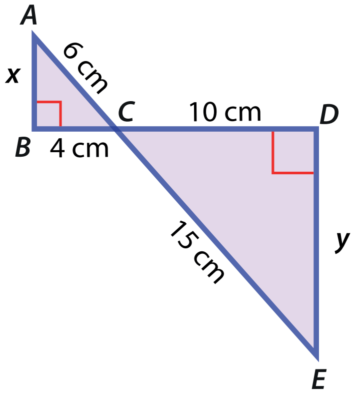
Actividad 70

1 **Resuelva las siguientes situaciones aplicando los criterios de semejanza de triángulos.**

a) En la imagen *E* es el punto medio del segmento *AB* y *EF* es paralelo con *AC*. Calcule la longitud del segmento *BC*.



b) Encuentre el valor de *y* en la siguiente figura.



2 **Determine si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifique su respuesta.**

☐ a) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

☐ b) Si dos triángulos son semejantes, entonces son equiláteros.

☐ c) Si dos triángulos son semejantes y uno de ellos es escaleno, entonces el otro triángulo también es escaleno.

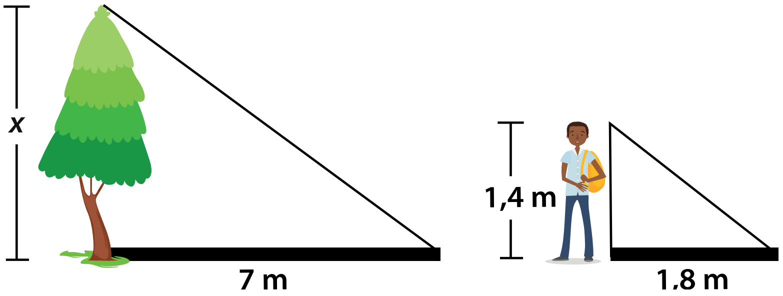
Clase 25 Esta clase tiene video

Tema: Problemas de aplicación de la semejanza de triángulos

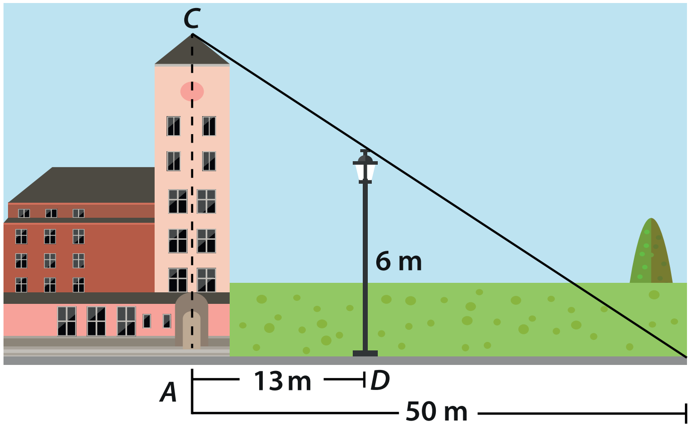
Actividad 71

Resuelva los siguientes problemas aplicando los criterios de la semejanza de triángulos.

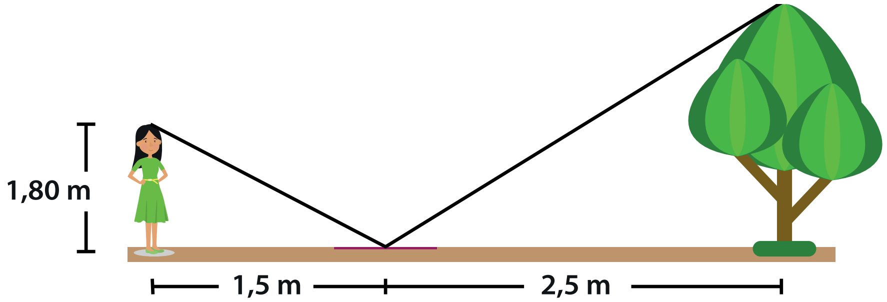
1. **La sombra que genera un niño de 1,4 m de estatura sobre el piso es de 1,8 m. Simultáneamente, un árbol genera una sombra de 7 m. Determine la altura *x* del árbol.**



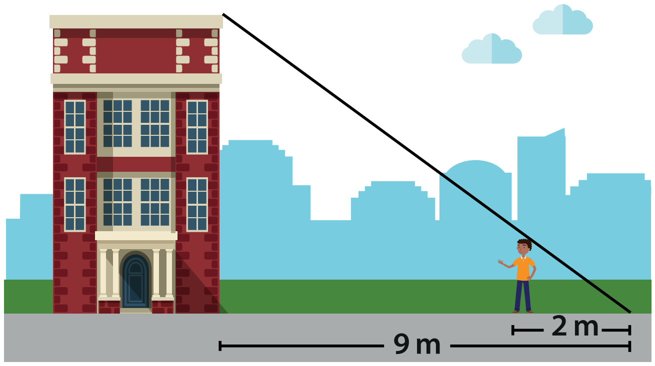
2. **Calcule la altura de la torre.**



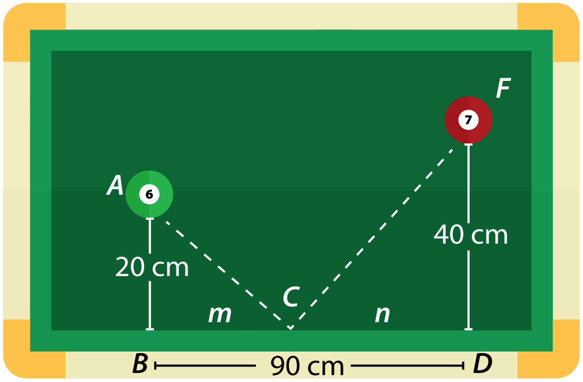
3 Un método para determinar la altura de un objeto consiste en poner un espejo en el piso y ubicarse en un lugar desde el cual se vea, en el espejo, la parte más alta del objeto. Observe la situación que se ilustra y determine la altura del árbol de la figura.



4 La persona que aparece en la figura tiene una estatura de 1,70 m, determine la altura del edificio.



5 **En la figura se muestra una mesa de billar.**



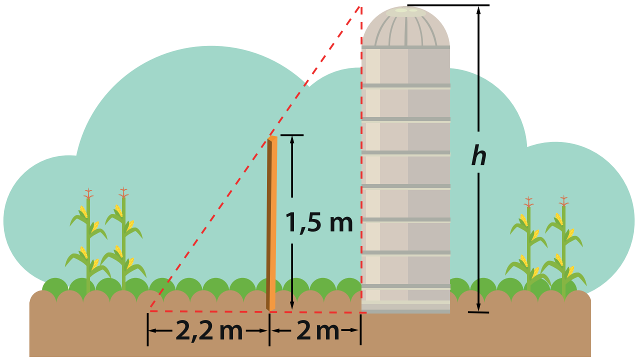
Propiedad de las proporciones

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

a) Explique porque los triángulos *ABC* y *FDC* son semejantes.

b) Utilizando el hecho de que los triángulos *ABC* y *FDC* son semejantes, encuentre el valor de *m* y el valor de *n*.

6 **Para conocer la altura del silo (depósito de trigo) de un pueblo, se alinea con él un palo y se mide su sombra, como se muestra en la figura. Determine dicha altura.**



Clase 1 Esta clase tiene video

Tema: Sistemas de ecuaciones lineales - método gráfico

Actividad 1

1 Lea con atención las siguientes situaciones:

- En una caja hay dos bolsas que contienen la misma cantidad de mangos y una bolsa que contiene naranjas. Se desconoce cuántos mangos y cuántas naranjas hay en cada bolsa. En total, hay 11 frutas.

  Supongamos que:

  • x es número de mangos en cada bolsa de mangos.

  • y es número de naranja en cada bolsa de naranjas.

  La situación descrita la podemos representar por la ecuación lineal: $2x + y = 11$

- Ahora, en otra caja hay una bolsa de mangos y tres bolsas que contienen la misma cantidad de naranjas. Se sabe que en esa caja hay un total de 18 frutas.

  Esta otra situación se representa por la ecuación: $x + 3y = 18$

  La pregunta que tenemos que resolver es ¿cuántos mangos y cuántas naranjas hay en las respectivas bolsas?

  Para solucionar la situación, se hace necesario determinar una solución común a las dos ecuaciones lineales en dos variables que se han obtenido del problema.

  Este conjunto de dos ecuaciones con dos variables o incógnitas se le denomina **sistema de ecuaciones lineales 2 × 2**, y se escribe así:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 & \boxed{1} \\ x + 3y = 18 & \boxed{2} \end{cases}$$

Para establecer la cantidad de frutas en cada paquete, es necesario solucionar el sistema de ecuaciones planteado. Para ello, usaremos la representación gráfica de cada una de las ecuaciones e identificaremos que el punto de intersección entre las dos rectas será la solución.

Para solucionar se siguen estos pasos.

Paso 1. Se despeja y en las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$, y se obtiene:

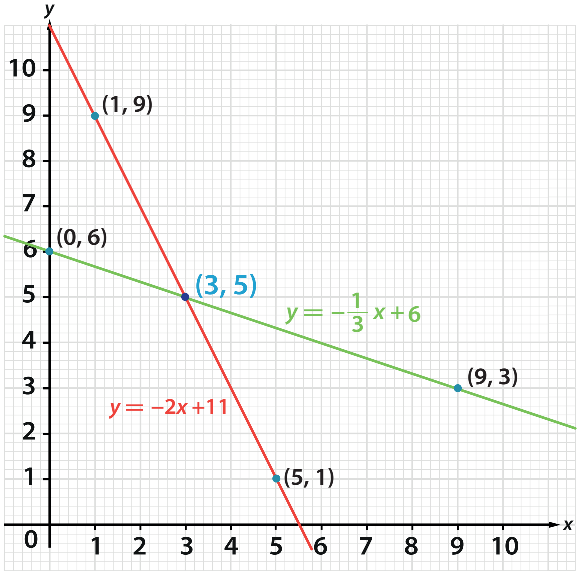
$$y = -2x + 11 \qquad y = -\frac{1}{3}x + 6$$

Paso 2. Se elabora una tabla de valores para determinar puntos en las dos rectas.

x	1	5
y	9	1

x	0	9
y	6	3

Paso 3. En un mismo plano cartesiano se dibujan las dos rectas.



①

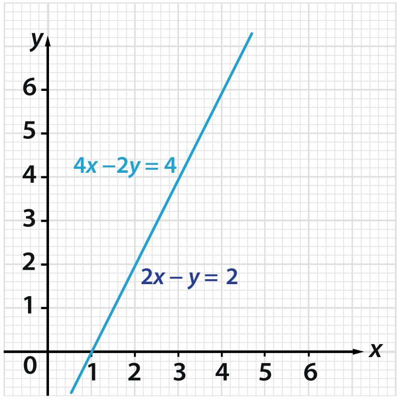
La expresión $y = mx + b$ define una línea recta donde m es la pendiente y b el punto de corte con el eje y.

- ¿Qué estrategia, diferente a tabular, se puede usar para graficar una línea recta?

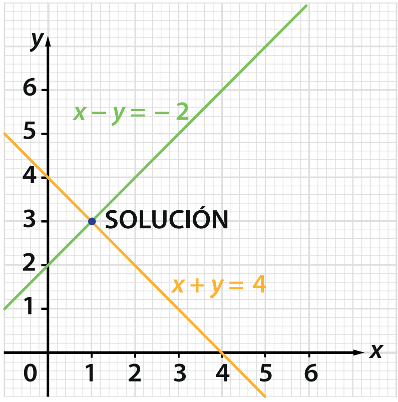
Paso 4. Se identifican las coordenadas del punto de intersección entre las rectas, pues esta será la solución del sistema. La solución del sistema es $x = 3$ y $y = 5$. ①

② **Observe las siguientes gráficas que muestran las posiciones que pueden tener dos rectas ubicadas en un mismo plano y su relación con las soluciones de un sistema de ecuaciones.**

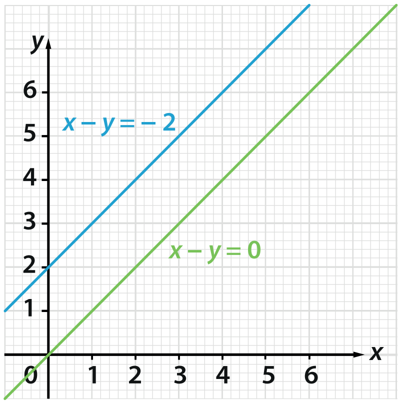
Caso 1



Caso 2



Caso 3



Para el caso 1. Las dos ecuaciones describen la misma recta, se dice que en este caso el sistema tiene infinitas soluciones y recibe el nombre de **dependiente**.

a) Explique porqué el sistema tiene infinitas soluciones.

Para el caso 2. Las rectas se intersecan en un punto; se dice que en este caso el sistema tiene una única solución y recibe el nombre de **consistente**.

b) Explique porqué el sistema tiene única solución.

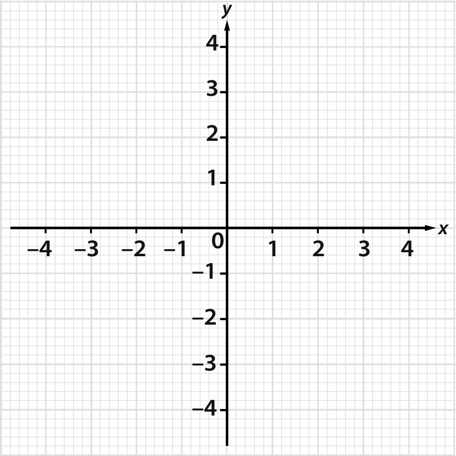
Para el caso 3. Las rectas no se intersecan en ningún punto; se dice que en este caso el sistema no tiene solución y recibe el nombre de **inconsistente**.

c) Explique porqué el sistema tiene no tiene solución.

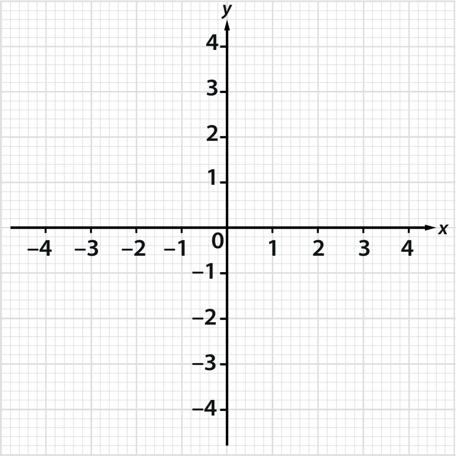
Actividad 2

① **Resuelva por el método gráfico los siguientes sistemas de ecuaciones:**

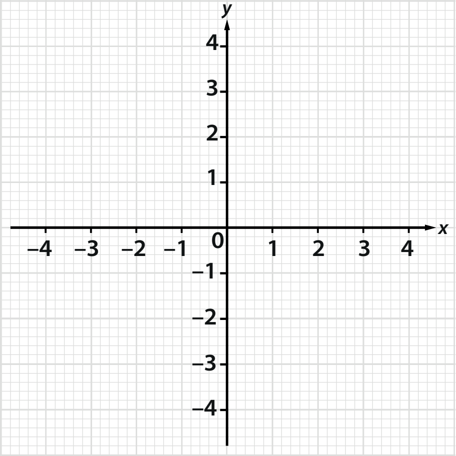
a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$



c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$



Clase 2

Actividad 3

1 **Grafique en el plano cartesiano las ecuaciones de cada sistema. Luego determine su solución.**

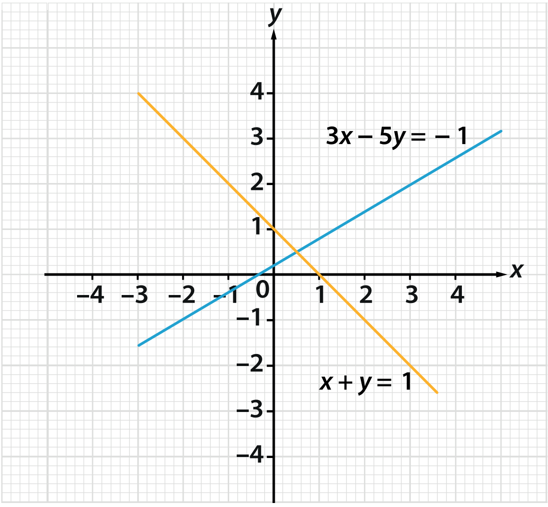
a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0{,}2x - 0{,}5y = 0{,}1 \end{cases}$

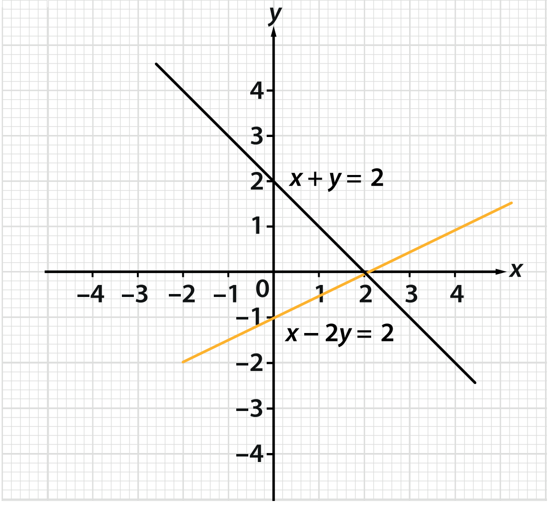
c) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

② **En las siguientes gráficas están representados sistemas de ecuaciones 2 × 2. Determine la solución para cada sistema.**

a)



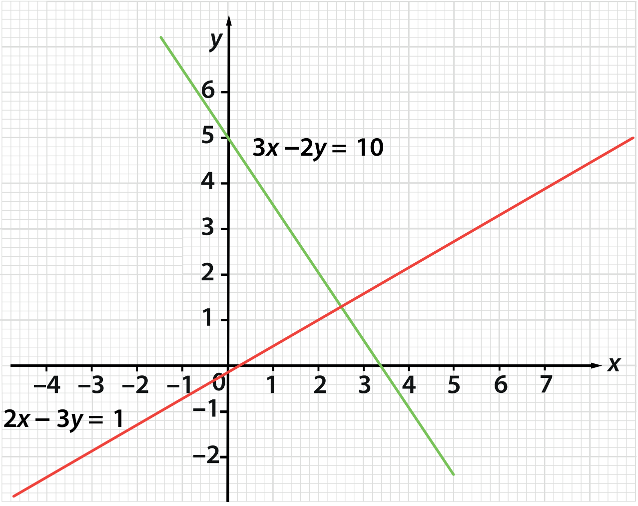
b)



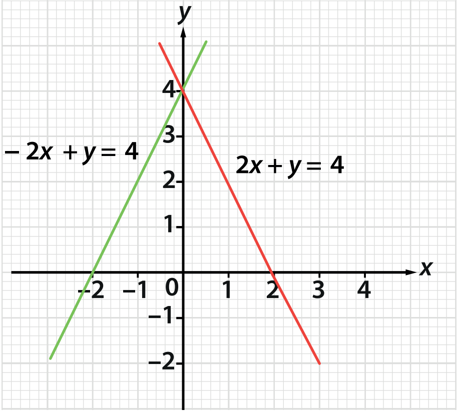
Actividad 4

① **Encuentre la solución de los sistemas de ecuaciones representados gráficamente y verifique que satisfacen cada una de las ecuaciones de cada sistema.**

a)



b)



2 **En cada caso, escriba una ecuación lineal que junto con la ecuación $5x - 2y = -4$ forme un sistema 2×2 que sea: consistente, inconsistente, dependiente. Luego, represente la solución gráfica de cada sistema y explique las diferencias tanto en las gráficas como en las ecuaciones.**

a) Consistente

b) Inconsistente

c) Dependiente

Clase 3

Tema: Solución de problemas

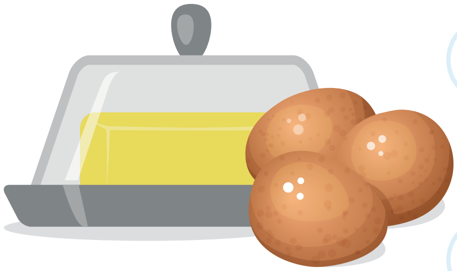
Actividad 5

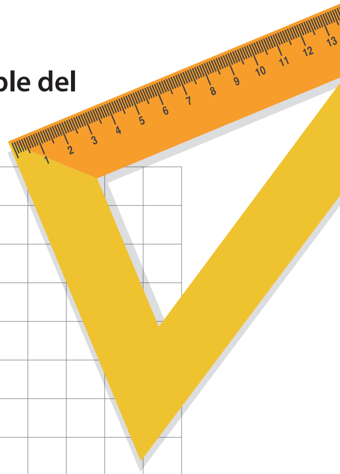
Solucione los siguientes problemas. Para ello, siga los pasos sugeridos a continuación:

- Lea cuidadosamente el problema e identifique los datos que serán representados por las variables *x* y *y*.
- Plantee el sistema de ecuaciones que relaciona la información.
- Solucione el sistema por el método gráfico. Elabore la gráfica de cada ecuación lineal y determine el punto en el cual se intersecan las rectas.
- Responda la pregunta del problema.

1. **El grado noveno realizó una actividad deportiva con el fin de reunir fondos para comprar el uniforme del equipo de fútbol. Cuando se hizo el balance final se encontró que se habían recogido 105 billetes entre billetes de $ 2.000 y de $ 5.000. ¿Cuántos billetes de $ 2.000 y cuántos de $ 5.000 había si el total que se recolectó fue $ 450.000?**

2 **Catalina va al supermercado. Para llevar 4 docenas de huevos y 3 libras de mantequilla debe pagar $ 14.100; pero si solamente lleva 3 docenas de huevos y una libra de mantequilla el valor a pagar será de $ 8.700. Ella desea saber el costo de una docena de huevos y el costo de una libra de mantequilla.**





3 El perímetro de un rectángulo es de 48 cm. Si el largo del rectángulo equivale al doble del ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Clase 4 Esta clase tiene video

Tema: Sistemas de ecuaciones lineales - método de igualación

Actividad 6

① **Lea la información dada sobre el método de igualación para solucionar sistemas de ecuaciones en dos variables. Analice el ejemplo dado.** ②

Ejemplo

Solucione el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7a - 3b = 15 \\ 5a + 6b = 27 \end{cases}$$

Se despeja la variable *a*, en ambas ecuaciones, obteniéndose:

$$a = \frac{15 + 3b}{7} \qquad a = \frac{27 + 6b}{5}$$

Ahora, se igualan las dos expresiones obtenidas para *a* y se soluciona para despejar *b*.

$$\frac{15 + 3b}{7} = \frac{27 - 6b}{5}$$

$$75 + 15b = 189 - 42b$$

$$15b + 42b = 189 - 75$$

$$57b = 114$$

$$b = \frac{114}{57}$$

$$b = 2$$

Luego, se reemplaza el valor obtenido para *b* en la primera ecuación y se halla el valor de *a*.

$$7a - 3(2) = 15 \qquad 7a - 6 = 15 \qquad 7a = 21 \qquad a = 3$$

Finalmente, se verifican las soluciones.

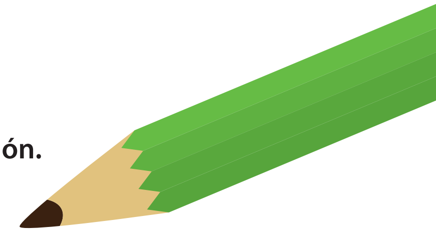
$$7(3) - 3(2) = 21 - 6 = 15 \qquad 5(3) + 6(2) = 15 + 12 = 27$$

②

Para solucionar sistemas de ecuaciones 2 × 2 por **igualación** se procede así:

1. Se despeja la misma variable o incógnita de las dos ecuaciones del sistema.
2. Aplicando la transitividad de las igualdades se igualan las dos expresiones obtenidas para la variable despejada.
3. Se soluciona la ecuación obtenida.
4. Luego, se reemplaza el valor obtenido en una de las dos ecuaciones y se halla el otro valor.
5. Finalmente, se verifica que los dos valores obtenidos para las variables satisfacen las ecuaciones del sistema.

② **Repita el proceso anterior despejando inicialmente la variable *b*. Luego, verifique que se llega a la misma solución.**



Actividad 7

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando el método de igualación.

1. $$\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 5x + 11y = 26 \\ 7x + 8y = 29 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3(a + b) = -4 \\ a - b = -2 \end{cases}$$

Clase 5

Tema: Solución de problemas

Actividad 8

Analice el ejemplo dado a continuación de un problema que genera un sistema de ecuaciones.

Gabriel tiene en su bolsillo billetes de \$ 10.000 y \$ 5.000 que suman \$ 50.000. Si se cambia el número de billetes de \$10.000 por el número de billetes de \$ 5.000 y viceversa, entonces suman \$ 70.000. Determine el número de billetes que tiene Gabriel de cada denominación.

Sea: x el número de billetes de \$ 10.000 que tiene Gabriel
y el número de billetes de \$ 5.000 que tiene Gabriel

Ahora, se plantean las ecuaciones con base en el enunciado del problema:

$$10.000x + 5.000y = 50.000 \quad \boxed{1}$$

$$5.000x + 10.000y = 70.000 \quad \boxed{2}$$

Luego, se despeja la variable y de las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$

$$y = \frac{50.000 - 10.000x}{5.000} \quad \boxed{3} \qquad y = \frac{70.000 - 5.000x}{10.000} \quad \boxed{4}$$

Se igualan la ecuaciones $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ y se despeja x.

$$\frac{50.000 - 10.000x}{5.000} = \frac{70.000 - 5.000x}{10.000} \quad \boxed{5}$$

$$10.000(50.000 - 10.000x) = 5.000(70.000 - 5.000x)$$

$$2(50.000 - 10.000x) = 70.000 - 5.000x$$

$$100.000 - 20.000x = 70.000 - 5.000x$$

$$100.000 - 70.000 = 20.000x - 5.000x$$

$$30.000 = 15.000x$$

$$x = \frac{30.000}{15.000} \qquad x = 2 \quad \boxed{6}$$

Se remplaza el valor de x en $\boxed{3}$

$$y = \frac{50.000 - 10.000(2)}{5.000} = \frac{50.000 - 20.000}{5.000} = \frac{30.000}{5.000} = 6 \qquad y = 6 \quad \boxed{7}$$

Luego la solución del sistema es $x = 2$, $y = 6$ ③

③

Falta un paso en el proceso que es la comprobación.

Verifique que los valores $x = 2$ y $y = 6$ satisfacen las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$, del sistema generado por el problema del ejemplo.

Actividad 9

Escriba el sistema de ecuaciones generado por cada uno de los siguientes problemas y resuélvalo por el método de igualación.

1 En una granja hay cerdos y gansos. Al contar las cabezas hay 50 y al contar las patas hay 134. ¿Cuántos animales hay de cada especie?

2 Hace 4 años la edad de María era el doble de la de Tatiana. Dentro de 8 años, la edad de Tatiana será $\frac{5}{8}$ de la edad de María. ¿Qué edad tienen actualmente María y Tatiana?

3 Para ingresar a la Universidad del Chocó se aplica una prueba de razonamiento que consta de 30 preguntas. Por cada respuesta correcta se asignan 5 puntos y por cada incorrecta (o no contestada) se restan 2 puntos. Si un participante obtuvo un puntaje de 94 puntos, ¿cuántas preguntas respondió correctamente?

Clase 6

Tema: Solución de un sistema de ecuaciones por sustitución

Actividad 10

1 Observe la manera en la que se solucionó el sistema de ecuaciones. ④

$$\begin{cases} y + 2x = 8 & \boxed{1} \\ 2y + 4 = 6x & \boxed{2} \end{cases}$$

$y = 8 - 2x$ Se despeja la variable y en la ecuación $\boxed{1}$.

$2(8 - 2x) + 4 = 6x$ Se sustituye en ecuación $\boxed{2}$.

$16 - 4x + 4 = 6x$ Se resuelve aplicando la propiedad distributiva.

$-4x - 6x = -16 - 4$ Se despeja x

$-10x = -20$

$\mathbf{x = 2}$

$2y + 4 = 6 \cdot 2$ Se sustituye en la ecuación $\boxed{2}$ el valor de x.

$2y = 12 - 4$ Se halla el valor de y.

$2y = 8$

$\mathbf{y = 4}$

Finalmente, se verifica en las ecuaciones que los valores encontrados satisfacen las igualdades.

$y + 2x = 8$	$2y + 4 = 6x$
$2(4) + 4 = 6(2)$	$(4) + 2 \cdot (2) = 8$
$12 = 12$	$8 = 8$

En conclusión, la solución del sistema es $\mathbf{x = 2}$ y $\mathbf{y = 4}$.

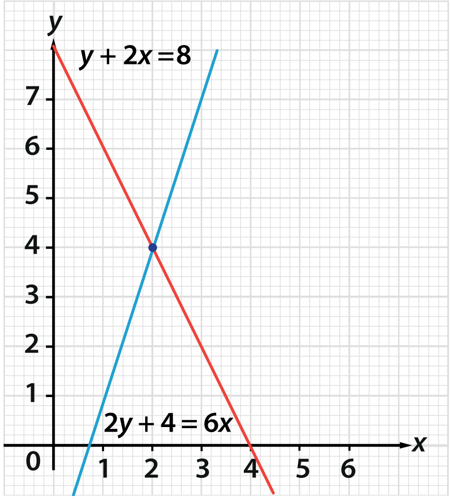
④

Para solucionar un sistema de ecuaciones por el método de sustitución, se realizan los siguientes pasos:

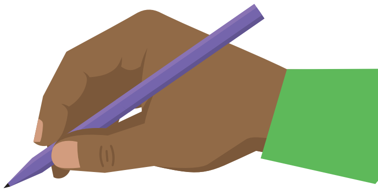
1. Se despeja una de las variables en cualquiera de las ecuaciones dadas.
2. Se sustituye la expresión obtenida en el primer paso en la otra ecuación y se resuelve.
3. Se encuentra el valor de la otra variable sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones del sistema el valor de la variable que se halló en el segundo paso.
4. Se verifican las soluciones.

■ Explique con sus propias palabras por qué este método se llama sustitución.

2 Analice la gráfica de las rectas que forman el sistema anterior.



¿Qué significan gráficamente los valores encontrados?



Actividad 11

1 Solucione los siguientes sistemas por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 8x + 4y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

2 Compruebe si el punto dado es solución del sistema de ecuaciones. En caso de no serlo, halle la solución correcta.

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ Solución $x = 6; y = 3$

b) $\begin{cases} 2x + 7y = 11 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$ Solución $x = 2; y = 1$

3 Encuentre el valor de *x* y de *y* a partir del planteamiento y la solución de un sistema de ecuaciones. El doble de *x* más el triple de *y* es igual a 4 y el doble de *x* más *y* es igual a 2.

Clase 7

Tema: Solución de un sistema de ecuaciones por reducción

Actividad 12

① **Lea la siguiente información.**

Un cuarto método para solucionar un sistema de ecuaciones es el de **reducción** y se siguen estos pasos.

Paso 1. Se multiplican los términos de una o de las dos ecuaciones por números reales, buscando que los coeficientes de una de las variables en las dos ecuaciones difieran en el signo.

Paso 2. Se suman las ecuaciones transformadas de tal forma que se elimine una variable y se despeje la otra variable.

Paso 3. Se calcula el valor de la incógnita que falta sustituyendo en una de las ecuaciones originales.

② **Observe la manera en la que se solucionó el sistema de ecuaciones usando el método de reducción.**

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & \boxed{1} \\ x + y = 5 & \boxed{2} \end{cases}$$

$-2x - y = -7$ Se multiplica la ecuación $\boxed{1}$ por -1

$$\begin{array}{r} -2x - y = -7 \\ x + y = 5 \\ \hline -x + 0y = -2 \\ -x = -2 \\ \mathbf{x = 2} \end{array}$$

Se suman las ecuaciones transformadas para eliminar *y*

Se despeja *x*

Como ya se tiene el valor de *x*, es posible reemplazarlo en una de las ecuaciones para encontrar el valor de *y*; en este caso se reemplazará en la ecuación $\boxed{2}$.

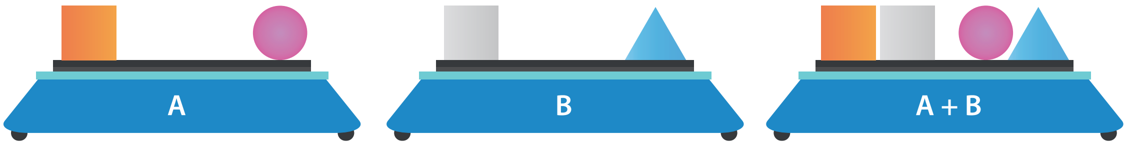
$x + y = 5$

$2 + y = 5$ Se sustituye el valor de *x* en una de la ecuación $\boxed{2}$

$\mathbf{y = 3}$ Se despeja la variable *y*

En conclusión, la solución del sistema de ecuaciones es $\mathbf{x = 2}$ y $\mathbf{y = 3}$.

② **Explique cómo se relaciona el siguiente esquema con el método de reducción.**



Actividad 13

① **Escriba frente a cada ecuación el número por el cual se debe multiplicar para eliminar la variable indicada al sumar las ecuaciones. Explique su respuesta.**

a) $\begin{cases} 2m - n = 4 \\ -4m + 3n = -2 \end{cases}$

Eliminar la variable *n*

b) $\begin{cases} -4x - 6y = 7 \\ -2x - 3y = 6 \end{cases}$

Eliminar la variable *y*

② **Solucione los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción.**

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}y = 0 \\ \dfrac{3}{5}x + \dfrac{1}{5}y = 1 \end{cases}$

Actividad 14

Resuelva en una hoja los sistemas de ecuaciones por reducción y según la solución obtenida asocie el caso correspondiente uniéndolo con una línea.

① $\begin{cases} -2x + y = -8 \\ x - \dfrac{1}{2}y = 4 \end{cases}$

② $\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = -3 \end{cases}$

No tiene solución, si al sumar las dos ecuaciones se obtiene la ecuación $o = c$ (c es una constante diferente de 0) se eliminan las dos variables.

Tiene infinitas soluciones, si al sumar las dos ecuaciones se obtiene la ecuación $0 = 0$.

Tiene una solución, si al sumar las dos ecuaciones se obtiene la ecuación $x = a$ (a es un número real).

Actividad 15

1 **Halle los valores para que la solución de cada sistema sea la dada en cada caso.**

a) $\begin{cases} 2x - y = \square \\ \square x + y = -1 \end{cases}$

Solución (–1, 2)

b) $\begin{cases} 3x + 2y = \square \\ \square x - 2y = -8 \end{cases}$

Solución (–3, 1)

2 **Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones empleando el método propuesto.**

a) Este sistema resulta más adecuado resolverlo por el método de **sustitución** ya que una de las variables se encuentra despejada en una de las dos ecuaciones.

$\begin{cases} 1 = 2x - 4y \\ y = x - 1 \end{cases}$

b) Este sistema puede resolverse por el método de **igualación** ya que se encuentra despejada la misma variable en las dos ecuaciones.

$\begin{cases} y = 10 - 6x \\ y = 4x - 2 \end{cases}$

c) Este sistema resulta más adecuado resolverlo por el método de **reducción** ya que no es sencillo despejar una de las variables en las dos ecuaciones.

$\begin{cases} -2x - 4 = 2y \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

3 **La elección del método depende de la estructura de cada una de las ecuaciones que conforman el sistema de ecuaciones. Sin embargo, cada estudiante elije su método favorito de solución. ¿Cuál método prefiere utilizar? ¿Por qué?**

Clase 8

Tema: Solución de problemas con sistemas de ecuaciones

Actividad 16

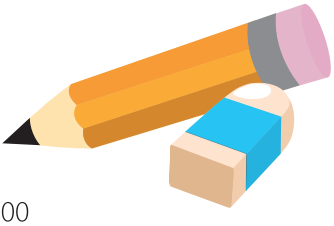
① **Lea atentamente la información sobre los pasos para solucionar un sistema de ecuaciones.**

Primero: leer con atención el enunciado.
Segundo: identificar las variables y plantear el sistema de ecuaciones.
Tercero: escoger un método para solucionar el sistema.
Cuarto: verificar las soluciones y responder la pregunta del problema

② **Lea la siguiente situación y su proceso de solución.**

- **Leer el enunciado.**

  Juan compró 2 lápices y 3 borradores por $ 6.600 y Camila compró 3 lápices y 4 borradores por $ 9.300. ¿Cuál es el precio de un lápiz y cuál es el precio de un borrador?



- **Identificar variables.**

  x es el precio de un lápiz

  y es el precio de un borrador

- **Plantear sistemas de ecuaciones.**

  Juan compró 2 lápices y 3 borradores por $ 6.600 $\longrightarrow 2x + 3y = 6.600$

  Camila compró 3 lápices y 4 borradores por $ 9.300 $\longrightarrow 3x + 4y = 9.300$

- **Elegir un método para solucionarlo, en este caso reducción.**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6.600 & \boxed{1} \\ 3x + 4y = 9.300 & \boxed{2} \end{cases}$$

$-6x - 9y = -19.800$	Se multiplica toda la ecuación $\boxed{1}$ por –3
$6x + 8y = 18.600$	Se multiplica toda la ecuación $\boxed{2}$ por 2
$0 - y = -1.200$	Se suman las ecuaciones transformadas para eliminar x
$-y = -1.200$	
$y = 1.200$	Se realizan las operaciones para despejar y
$2x + 3 \cdot 1.200 = 6.600$	Se reemplaza el valor de y en una de las ecuaciones
$2x + 3.600 = 6.600$	Se despeja la variable x
$x = 1.500$	

Por tanto la solución del sistema de ecuaciones es $x = 1.500$ y $y = 1.200$

- **Verificar en las ecuaciones que los valores encontrados hacen verdadera las igualdades.**

$2x + 3y = 6.600$	$3x + 4y = 9.300$
$2(1.500) + 3(1.200) = 6.600$	$3(1.500) + 4(1.200) = 9.300$
$3.000 + 3.600 = 6.600$	$4.500 + 4.800 = 9.300$
$6.600 = 6.600$	$9.300 = 9.300$

- **Responder la pregunta del problema.** El precio de un lápiz es de $ 1.500 y un borrador es de $ 1.200

Actividad 17

Teniendo en cuenta los procedimientos empleados en el ejemplo anterior, resuelva las siguientes situaciones problema.

1. **La suma de dos números es 10 y su diferencia es 4. ¿Cuáles son los números?**

2. **Si $\frac{1}{3}$ de la suma de dos números es 4 y $\frac{1}{2}$ de la diferencia de los números es 2, ¿cuáles son los números?**

3. **Las edades de Lucia y Álvaro suman 42 años. La edad de Álvaro es 8 años más que la de Lucia. ¿Cuáles son las edades de cada uno?**

4. **El perímetro de un rectángulo es 24 cm. Si el lado mayor se disminuye en 1 cm y el lado menor se duplica, el nuevo rectángulo tiene un perímetro de 30 cm. ¿Cuáles son las medidas del primer rectángulo y cuáles son las medidas del segundo rectángulo?**

Actividad 18

Resuelva la siguiente situación de tres formas: completando una tabla, realizando una gráfica y de forma algebraica.

En una finca hay ovejas y gallinas. Al contar el total de cabezas se cuentan 25 y al contar el total de patas, este es de 80. ¿Cuántas gallinas y cuantas ovejas hay en la granja?

① **Se puede resolver esta situación empleando una tabla e ir buscando el valor más adecuado.**

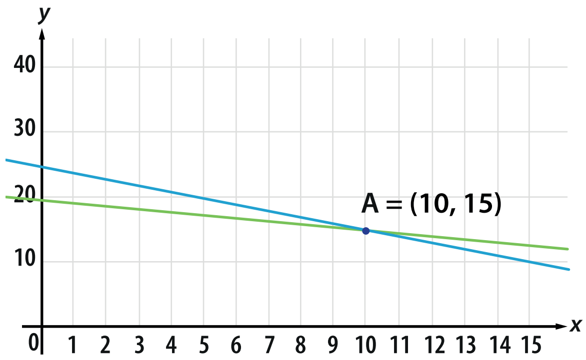
a) Complete la tabla

Cabezas (1 cabeza cada uno)			Patas (2 patas) (4 patas)		
Gallina	Oveja	Total	Gallina	Oveja	Total
1	24	25	2	96	98
2	23	25	4	92	96
3	22	25			
4	21	25			
		25			
		25			
		25			
		25			
		25			
		25			
		25			

b) ¿Fue posible encontrar la solución de la situación?

c) ¿Cómo le parece este método de solución?

② **Otra forma para solucionar es elaborar la gráfica de las ecuaciones del sistema.**



x cantidad de gallinas y cantidad de ovejas

a) Plantee las ecuaciones que representan cada una de las rectas.

b) ¿Qué representa el punto A?

③ **Resuelva la situación planteando el sistema de ecuaciones de forma algebraica y empleando el método que considere adecuado para solucionarlo.**

Clase 9 Esta clase tiene video

Tema: Inecuaciones lineales

Actividad 19

1 **Lea las siguientes expresiones.**

a) La temperatura promedio de la ciudad de Quibdó es mayor que 26 °C.

b) El precio del pantalón está entre $ 30.000 y $ 50.000.

c) La edad de Juana está entre 14 años y 23 años.

Estas expresiones se pueden representar como inecuaciones de la siguiente manera:

a) $x > 26°$ C

b) \$ 30.000 $< x <$ \$ 50.000

c) 14 años $< x <$ 23 años

2 **Escriba tres ejemplos de inecuaciones.** 5

5

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que se usan los signos $<, >, \leq, \geq$.

Para resolver una inecuación se deben aplicar las mismas propiedades de las ecuaciones; sin embargo, se debe tener cuidado cuando se multiplica o se divide por un numero negativo pues el sentido de la desigualdad cambia.

Multiplique por -1 la expresión $12 < 18$. ¿Qué pasa con la desigualdad?

3 **Observe cómo se solucionó la siguiente inecuación:**

$-3x - 15 > 6$

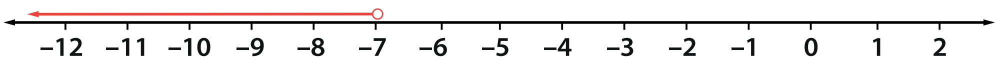
$-3x > 6 + 15$

$-3x > 21$

$x < 7$

El signo $>$ cambió en la última línea por $<$, ya que se dividió entre -3.

La gráfica de la solución de esta inecuación se hace en la recta real.

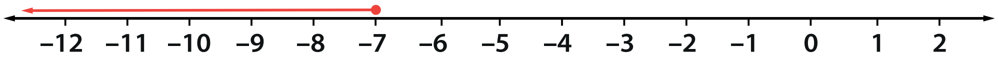


La expresión $x < 7$ es la solución; gráficamente indica el intervalo que incluye todos los valores que son menores que -7.

a) Solucione la siguiente inecuación $-3x - 15 \geq 6$

b) ¿Son iguales las inecuaciones $-3x - 15 > 6$ y $-3x - 15 \geq 6$? Explique su respuesta.

c) Observe la representación gráfica de la inecuación $-3x - 15 \geq 6$ en la recta real.

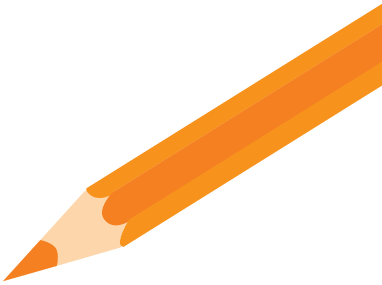


d) ¿Que diferencia hay en las representaciones gráficas de las dos inecuaciones?

Actividad 20

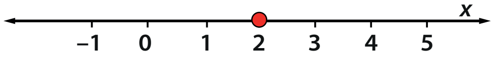
1 **Observe los siguientes ejemplos y responda.**

$2x + 3 = 7$	$2x + 3 > 7$
$2x = 4$	$2x > 4$
$\mathbf{x = 2}$	$\mathbf{x > 2}$

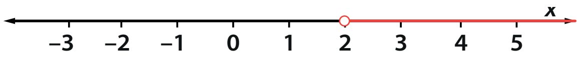


a) ¿Qué nombre recibe cada una de los procedimientos que se realizaron?

b) Observe la representación gráfica de la solución de las dos expresiones.



$2x + 3 = 7$



$2x + 3 > 7$

c) Escriba las diferencias que observa en estas dos representaciones gráficas.

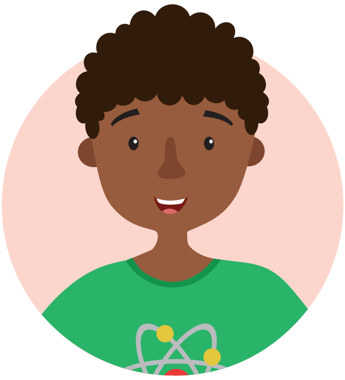
En la expresión $2x + 3 = 7$	**En la expresión $2x + 3 > 7$**

d) Lea la siguiente información.

La solución de una inecuación puede incluir el valor señalado o no incluirlo.

En el caso en el que la inecuación se plantee la relación mayor que (>) o menor que (<) la solución no incluye el valor.

En el caso en el que la inecuación se plantee la relación mayor o igual que (≥) o menor o igual que (≤) la solución incluye el valor.



Actividad 21

Resuelva las inecuaciones y represente la solución en la recta real.

① $x + 5 > 9$

② $x - 6 < 2$

③ $5x + 22 > 7$

④ $4x - 7 \leq 9$

⑤ $-3x + 6 \geq 12$

⑥ $9 - 8x < 25$

Clase 10

Esta clase tiene video

Tema: Inecuaciones con dos variables

Actividad 22

1 **Relacione, uniendo con una línea, cada afirmación con la expresión algebraica que corresponda.**

a) Sus soluciones son intervalos de valores. ○

b) Son expresiones algebraicas que incluyen desigualdades. ○

c) En el sistema de coordenadas su solución representa un punto. ○

d) Sus soluciones son valores determinados de las variables. ○

e) Son expresiones algebraicas que incluyen una igualdad. ○

f) En el sistema de coordenadas su solución representa un semiplano o región. ○

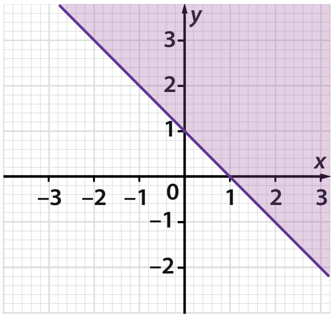
○ Ecuaciones

○ Inecuaciones

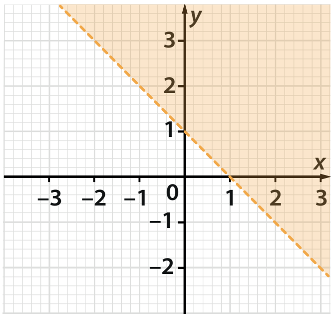
Actividad 23

1 **Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta de la figura es $y = -x + 1$ escriba la inecuación correspondiente a cada literal. Justifique la respuesta.**

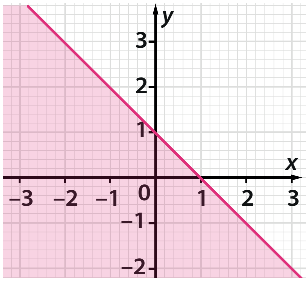
a)



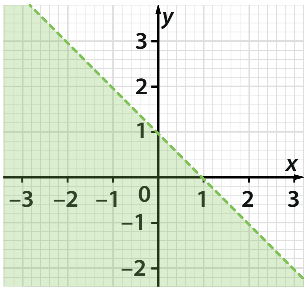
b)



c)

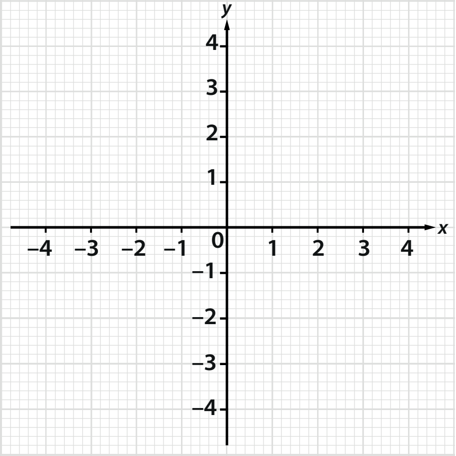


d)

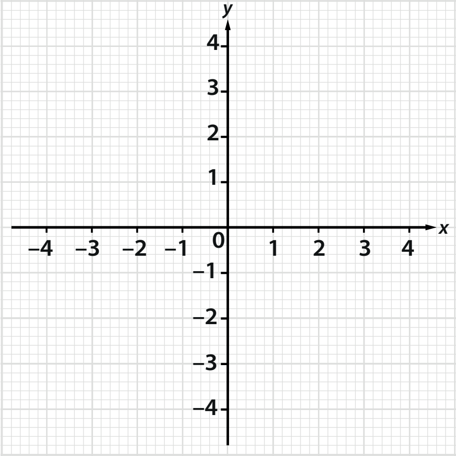


② **Represente gráficamente las siguientes inecuaciones.**

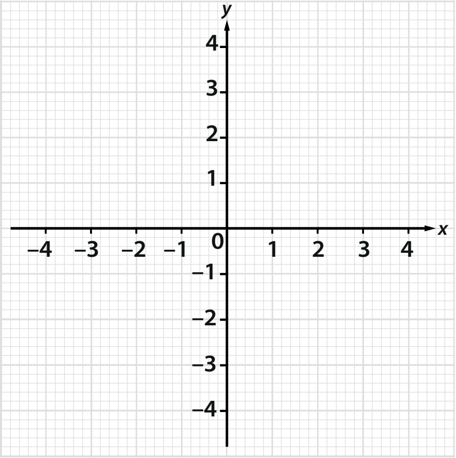
a) $y \leq 2x - 1$



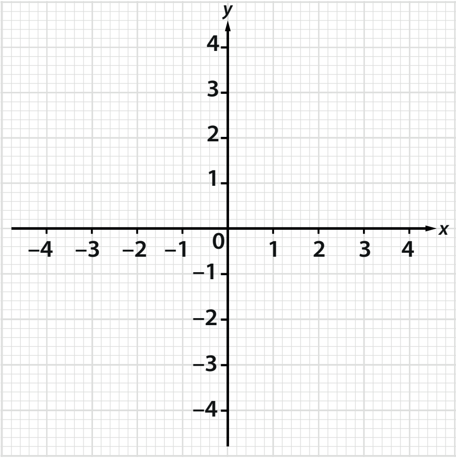
b) $y > -2x + 1$



c) $y \geq -3x + 4$

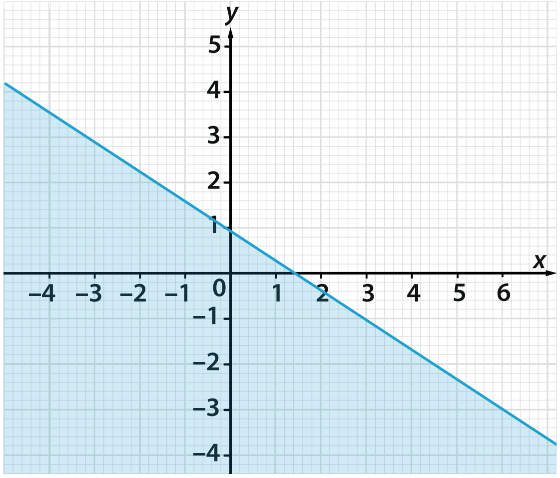


d) $y < \frac{1}{2}x - 2$



Actividad 24

Escriba Falso (F) o Verdadero (V) en las siguientes afirmaciones realizadas sobre la gráfica que representa la solución de una inecuación. Justifique cada respuesta.

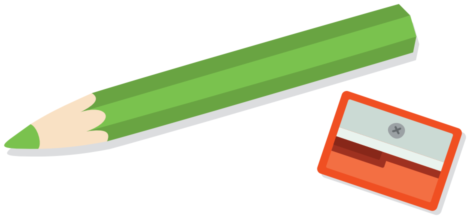


① ☐ **La inecuación representada es: $y \leq -\frac{2}{3}x + 1$**

② ☐ **El punto (3,-1) no pertenece a la región que describe la inecuación.**

③ ☐ **El punto (-1, 2) pertenece a la región de la inecuación.**

④ ☐ **La recta $y = -\frac{2}{3}x + 1$ hace parte de la región que representa la inecuación.**



Actividad 25

**Plantee en cada caso una expresión que describa la situación.
Proponga varios valores que verifiquen la expresión planteada.**

1. **La suma de un numero entero con otro número entero que es dos unidades mayores que este, es menor que 8. ¿Cuál puede ser ese número?**

2. **Pedro estudió para un examen de Matemáticas 2 horas más que Camilo, pero se sabe que si se unen los tiempos empleados por los dos para estudiar el resultado es menor a 12 horas. ¿Cuál es el mínimo de horas que estudió cada uno?**

3. **El perímetro de un rectángulo, cuya base es 3 cm mayor que su altura, es menor que 50 cm.**

4. **En un examen de 40 preguntas se dan dos puntos por cada acierto y se restan 0,5 puntos por cada error. Si es obligatorio responderlas todas, ¿cuántas preguntas hay que contestar bien para obtener mínimo 40 puntos?**