Institucion Educativa

# JUAN PABLO I

La Llanada Nariño.

# Matematicas.

## GRADO 6º

## MODULO EDUCATIVO 1

ALCALDÍA MUNICIPAL LA LLANADA

NIT: 800.149.894-0

Comprometidos con la comunidad

**MUNICIPIO LA LLANADA**

Colombia aprende
La red del conocimiento

El futuro es de todos
Gobierno de Colombia

Gobernación de Nariño
¡EN DEFENSA DE LO NUESTRO!

## 2.3 Operaciones entre números naturales

Enlace web

En el conjunto de los números naturales se definen las siguientes operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

### Adición de números naturales

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, se define la **suma o adición** como: $a + b = c$
Donde $a$ y $b$ se denominan sumandos y $c$ suma o total.

Por ejemplo, en la operación $213 + 17 = 230$, los números 213 y 17 son los sumandos y 230 es la suma o total.

La adición en el conjunto de los números naturales cumple las siguientes propiedades:

| Propiedad | | Ejemplo |
|---|---|---|
| Clausurativa | Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $a + b \in \mathbb{N}$. | $34$ y $26 \in \mathbb{N}$.<br>Luego, $34 + 26 = 60$; $60 \in \mathbb{N}$. |
| Conmutativa | Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $a + b = b + a$. | $15$ y $28 \in \mathbb{N}$.<br>$15 + 28 = 43$ y $28 + 15 = 43$.<br>Por tanto, $15 + 28 = 28 + 15$. |
| Asociativa | Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces, $a + (b + c) = (a + b) + c$. | $9, 28$ y $8 \in \mathbb{N}$.<br>$(9 + 28) + 8 = 37 + 8 = 45$<br>$9 + (28 + 8) = 9 + 36 = 45$<br>Por tanto, $(9 + 28) + 8 = 9 + (28 + 8)$ |
| Modulativa | Si $a \in \mathbb{N}$, entonces, $a + 0 = 0 + a = a$. | $78 \in \mathbb{N}$.<br>Luego, $78 + 0 = 0 + 78 = 78$. |

**Matemáticamente**

Muchos años de este milenio pueden representarse como la suma de dos números consecutivos.

Por ejemplo, el año 2025 puede escribirse como: 1012 + 1013. ¿Qué años no se pueden escribir de esa manera?

### EJEMPLOS

**1. En una gran industria había 846 empleados.**

**Luego, se produjo una expansión de sus instalaciones y 328 empleados nuevos fueron contratados. ¿Cuántos empleados hay ahora en la industria?**

Para resolver el problema se identifican los datos conocidos:

846: cantidad inicial de empleados.

328: cantidad de empleados nuevos contratados.

**Luego,** se plantea la operación y se resuelve.

$$846 + 328 = 1.174$$

**Por tanto,** la industria tiene ahora 1.174 empleados.

**2. Realizar la siguiente adición 7.542.600 + 3.135.590.**

Para resolver la adición, se descomponen los sumandos y se aplica la propiedad asociativa.

$7.542.600 + 3.135.590 =$

$7.000.000 + 3.000.000 + 542.000 + 135.000 + 600 + 590$

**Luego,** se realizan las adiciones parciales, así:

$7.542.600 + 3.135.590$

$= 10.000.000 + 677.000 + 1.190 = 10.678.190$

**Por tanto,** $7.542.600 + 3.135.590 = 10.678.190$.

## Sustracción de números naturales

La **sustracción** o **resta** es la operación inversa a la adición, por lo cual conocidos la suma y uno de los sumandos, la sustracción permite hallar el otro sumando.

> Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $a \geq b$, se define la resta o sustracción de $a$ y $b$ como
> $$a - b = c \text{ siempre que } a = b + c$$
> $a$ se llama minuendo, $b$ sustraendo y $c$ diferencia.

Por ejemplo, $527 - 318 = 209$, ya que: $209 + 318 = 527$. En este caso, 527 es el minuendo, 318 el sustraendo y 209 la diferencia.

**Recuerda que…**

El símbolo $\geq$ se lee mayor o igual que. Para poder hacer una resta en los números naturales el minuendo debe ser "$\geq$" mayor o igual que el sustraendo.

Recurso imprimible

## Suma y resta de números naturales

En algunas expresiones aparecen, de forma combinada, la suma y la resta. Ambas operaciones tienen la misma prioridad y se realizan según van apareciendo de izquierda a derecha.

Por ejemplo, $145 - 89 + 44 - 75$.

Primero, se resta $145 - 89$, luego se suma 44 y por último, se resta 75, así:

$145 - 89 + 44 - 75 = 56 + 44 - 75 = 100 - 75 = 25.$

## EJEMPLOS

**1. Si $a = 324$, $b = 408$ y $c = 207$, realizar todas las restas posibles con los números naturales dados.**

Como es necesario que el minuendo sea mayor que el sustraendo, entonces, con los números dados es posible realizar solamente tres restas diferentes.

$b - a = 408 - 324 = 84$

$b - c = 408 - 207 = 201$

$a - c = 324 - 207 = 117$

**2. En una panadería hay 112 tortas. 64 son de maíz, 37 son de zanahoria y el resto son de chocolate. ¿Cuántas tortas de chocolate hay?**


Se identifican los datos conocidos:

112: cantidad total de tortas.

64: cantidad de tortas de maíz.

37: cantidad de tortas de zanahoria.

**Luego,** la cantidad de tortas de chocolate se obtiene al restar de la cantidad total de tortas, la cantidad de tortas de maíz y de zanahoria. Es decir:

$$\begin{aligned} 112 - (64 + 37) &= 112 - 101 \\ &= 11 \end{aligned}$$

**Por tanto,** hay 11 tortas de chocolate.

**3. Sara y John van a un parque de diversiones y deciden tomar una bebida diferente y comer una hamburguesa cada uno para almorzar.**

| Productos | Precio |
|---|---|
| Hamburguesa | 7.550 |
| Pizza personal | 6.500 |
| Gaseosa | 1.500 |
| Limonada | 1.800 |
| Jugo en caja | 1.150 |

**Si pagan con \$20.000 y consumieron las bebidas más económicas según la lista de precios, ¿cuánto dinero les devolvieron?**

Cada persona tomó una bebida diferente y de las más económicas, entonces, Sara y John compraron un jugo en caja y una gaseosa.

Además, cada uno consumió una hamburguesa.

**Luego,** la cantidad de dinero que gastaron Sara y John fue:

$$1.150 + 1.500 + 7.550 + 7.550 = 17.750.$$

Para conocer la cantidad de dinero que les devolvieron se resta lo que gastaron de los \$20.000 que pagaron.

Así: $20.000 - 17.750 = 2.250$

**Por tanto,** la cantidad de dinero que les devolvieron a Sara y John fue \$2.250.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Soluciono problemas

**Reconstruye cada una de las operaciones, ubicando las cifras desaparecidas en cada espacio.**

**103.** 43□ + 2□5 + □87 = 1.068

**104.** 8.□22 − 2.5□7 = □.555

**105.** 5.6□8 + 4.09□ + □.856 = 13.□49

**106.** □1.8□6 − 3.□52 = 8.27□

**Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.**

**107.** La resta es una operación que cumple con la propiedad modulativa.

**108.** Cuando se conocen el minuendo y la diferencia se puede determinar el sustraendo.

**Escribe en cada espacio el número que hace falta.**

**109.** 33 + ___ = 25 + 33

**110.** (5 + 36) + 24 = 5 + (___ + 24)

**111.** ___ + 0 = 0 + ___ = 15

**112.** (3 + 18) + 4 = 3 + (4 + ___)

**Relaciona cada adición con su respectivo resultado.**

**113.** 18.516 + 14.341 — **a.** 787.082

**114.** 8.267 + 73.656 — **b.** 101.975.898

**115.** 747.915 + 39.167 — **c.** 81.923

**116.** 26.820.934 + 3.256.268 — **d.** 32.857

**117.** 34.408.573 + 67.567.325 — **e.** 30.077.202

**Completa los siguientes cuadrados mágicos. Ten en cuenta que en un cuadrado mágico, el total de sumar los números horizontal, vertical y diagonalmente es el mismo, y que todos los números son distintos.**

**118.**

| | | |
|---|---|---|
| 168 | 318 | 288 |
| 378 | | |
| | 198 | |

**119.**

| | | |
|---|---|---|
| 768 | | |
| | 480 | |
| | 864 | 192 |

**Si se sabe que cada letra representa un dígito y que letras iguales corresponden a dígitos iguales y letras diferentes corresponden a dígitos diferentes, reconstruye las operaciones planteadas.**

**120.**
```
  S O L
+ S O L
-------
L A N A
```

**121.**
```
  L E O N
+ N O E L
---------
  O T R A
```

**122.**
```
  O R A
+ O R A
-------
D A T E
```

**Inventa una pregunta para cada situación. Luego, respóndela.**

**123.** En una ciudad hay registrados 136.726 extranjeros. La ciudad cuenta con 1.223.538 habitantes.

**124.** Claudia tiene 15 años, su primo Carlos tiene 8 años más que ella, Andrea tiene el doble de años que Claudia y su hermano tiene 10 años menos que Andrea.

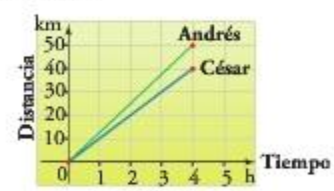
**125.** Carlos vendió su carro en $8.500.000 y ganó $3.750.000.

**Soluciona.**

**126.** Una empresa dedicada a la producción de plantas exportó 563.256 orquídeas, 185.562 helechos y 368.850 rosas. ¿Cuántas plantas exportó en total?

**127.** Roberto nace en 1928 y se casa a los 30 años. Dos años después nace su hija y él muere cuando ella tiene 30 años. ¿En qué año muere Roberto?

**128.** El diagrama muestra la distancia en kilómetros que viajaron los ciclistas Andrés y César a partir del mismo punto. ¿Cuántos kilómetros de ventaja le lleva Andrés a César cuatro horas después de haber salido?




**Un escalador, después de subir 455 metros de una montaña, subió 325 metros más. Sin embargo, se resbaló y bajó 18 metros. Luego, subió 406 metros, ¿qué altura alcanza?**

**129.** Plantea la operación para resolver el problema.

**130.** Determina la altura final del escalador.

## Multiplicación de números naturales

Recurso imprimible

Dados $a$, $b$ y $c \in \mathbb{N}$, $a \times b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ veces}} = c$

Donde $a$ y $b$ son los factores y $c$ es el producto.

Por ejemplo, en la multiplicación $8 \times 7 = 56$, los números 8 y 7 son los factores y 56 el producto.

La multiplicación de números naturales cumple las siguientes propiedades:

| Propiedad | | Ejemplo |
|---|---|---|
| Clausurativa | Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times b \in \mathbb{N}$. | $12$ y $4 \in \mathbb{N}$. Luego, $12 \times 4 = 48$ y $48 \in \mathbb{N}$. |
| Conmutativa | Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times b = b \times a$. | $11$ y $8 \in \mathbb{N}$. $11 \times 8 = 88$ y $8 \times 11 = 88$. Por tanto, $11 \times 8 = 8 \times 11$. |
| Asociativa | Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$. | $9, 8$ y $5 \in \mathbb{N}$. $(9 \times 8) \times 5 = 72 \times 5 = 360$. $9 \times (8 \times 5) = 9 \times 40 = 360$. Por tanto, $(9 \times 8) \times 5 = 9 \times (8 \times 5)$. |
| Modulativa | Si $a \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times 1 = 1 \times a$. | $15 \in \mathbb{N}$. Luego, $15 \times 1 = 1 \times 15 = 15$. |
| Distributiva | Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. | $5, 13$ y $7 \in \mathbb{N}$. $5 \times (13 + 7) = 5 \times 20 = 100$. $(5 \times 13) + (5 \times 7) = 65 + 35 = 100$. Por tanto, $5 \times (13 + 7) = (5 \times 13) + (5 \times 7)$. |
| Producto con factor cero | Si $a \in \mathbb{N}$, entonces, $a \times 0 = 0 \times a = 0$. | $7 \in \mathbb{N}$. Luego, $7 \times 0 = 0 \times 7 = 0$. |

Actividad

## Multiplicaciones abreviadas

Existen multiplicaciones que se pueden resolver con mayor facilidad siguiendo unas reglas específicas. Algunas de estas multiplicaciones son:

- **Multiplicación de un número por una potencia de 10**. Para multiplicar cualquier número natural por una potencia de 10, se escribe el mismo número y se acompaña de tantos ceros como tenga la potencia de 10.

  Por ejemplo, $34 \times 100 = 3.400$

- **Multiplicación de un número por 11, 12, ..., 19**. Para multiplicar cualquier número natural por un número de dos cifras que presente tan solo una decena, se expresa la multiplicación en forma horizontal y se multiplica el primer número por la cifra de las unidades del segundo número. Luego, se escribe este producto de derecha a izquierda a partir del signo $\times$ y se realiza la suma correspondiente. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rl} 2\,1\,5 \times 1\,3 & \text{Se expresa la multiplicación en forma horizontal.} \\ +\quad 6\,4\,5\phantom{\times 1\,3} & \text{Se multiplica 215 por 3 y se escribe el resultado debajo de } 15\times. \\ \hline 2.7\,9\,5\phantom{\times 1\,3} & \text{Se efectúa la suma correspondiente.} \end{array}$$

Actividad | Recurso imprimible | Ampliación multimedia

## División de números naturales

La **división** es la operación que permite repartir una cantidad en partes iguales; sin embargo, esto no es posible hacerlo de manera exacta en todos los casos en los números naturales, por ello, la división en este conjunto se puede clasificar en exacta cuando el residuo es cero e inexacta cuando el residuo es diferente de cero.

### División exacta

Una **división es exacta** cuando existe un número natural que multiplicado por el divisor da como resultado el dividendo. Así:

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, se define la división exacta como:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & c \end{array} \quad \text{siempre que } a = b \times c$$

$a$ se denomina dividendo, $b$ divisor y $c$ cociente. En este caso, el residuo de la división es 0.

### División inexacta

Una **división es inexacta** cuando no existe un número natural que multiplicado por el divisor dé como resultado el dividendo. Así:

Dados $a, b, c$ y $d \in \mathbb{N}$, se define la división inexacta como

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} d & c \end{array} \quad \text{siempre que } a = b \times c + d, d < b \text{ y } b \neq 0$$

$a$ se denomina dividendo, $b$ divisor, $c$ cociente y $d$ residuo. En este caso, el residuo de la división es diferente de 0.

**Matemáticamente**

Se encienden 9 velas al mismo tiempo. Si cada vela encendida dura 3 horas, ¿para cuántas horas tendremos iluminación con el total de velas encendidas?

## EJEMPLOS

**1. Realizar cada división. Luego, determinar si las divisiones son exactas o inexactas.**

**a. 108 ÷ 12.**

$$\begin{array}{r|l} 108 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 9 \end{array}$$

Luego, la división es exacta porque el residuo es cero.

**b. 87 ÷ 11.**

$$\begin{array}{r|l} 87 & 11 \\ \cline{2-2} 10 & 7 \end{array}$$

Luego, es una división inexacta, porque el residuo es 10.

**2. En una fábrica de galletas se hicieron 4.656 galletas que fueron repartidas por igual en 24 cajas. ¿Cuántas galletas se colocaron en cada caja?**

Los datos conocidos del problema son:

4.656: cantidad de galletas fabricadas.

24: número de cajas para repartir por igual.

Como se debe repartir 4.656 galletas en 24 cajas, entonces se debe realizar una división, para encontrar la cantidad de galletas que hay en cada caja.

Así: 4.656 ÷ 24 = 194.

Por tanto, la cantidad de galletas que se colocaron en cada caja es 194.

**3. Por la fibra óptica se transportan llamadas telefónicas, mediante ondas de diferente frecuencia. Por cada fibra pueden viajar hasta 32 ondas de distinta frecuencia. Cada frecuencia permite llevar 120.000 llamadas. ¿Cuántas llamadas transporta un cable submarino de 64 fibras ópticas?**

Para conocer el número de llamadas que transporta un cable con 64 fibras ópticas, se realiza lo siguiente:

**Primero,** se calcula el número de llamadas por cada fibra óptica. Así: 120.000 × 32 = 3.840.000

**Luego,** se determina el número de llamadas en 64 fibras ópticas. 3.840.000 × 64 = 245.760.000

**Por tanto,** la cantidad de llamadas que transporta 64 fibras es 245.760.000.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

**Escribe el valor de cada expresión teniendo en cuenta las condiciones dadas.**

**131.** $a \times b \times (c \times d)$

si $a \times c = 81$
$b = 6$
$d = 1$

**132.** $a \times (b \times c) \times (d \times e)$

si $a \times d = 15$
$b \times c = 8$
$e = 0$

**Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta con un ejemplo.**

**133.** El módulo de la división es el 1. (  )

**134.** La propiedad distributiva es la expresión $a + (b \times c) = a \times b + a \times c$. (  )

**135.** El resultado de dividir a cero entre un número natural es siempre cero. (  )

**136. Completa la siguiente tabla multiplicando en forma abreviada.**

| $a$ | $b$ | $c$ | $a \times b$ | $b \times c$ | $a \times c \times 10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 11 | 35 | | | |
| 55 | 10 | 120 | | | |
| 29 | 15 | 70 | | | |
| 15 | 783 | 96 | | | |
| 25 | 14 | 1.000 | | | |

**Determina el cociente e indica si la división es exacta o no.**

**137.** 3.456 ÷ 6

**138.** 3.455 ÷ 15

**139.** 9.356 ÷ 23

**140.** 8.563 ÷ 17

**Encuentra en cada división el menor número que hay que sumar al dividendo para que el cociente aumente en una unidad y sea una división exacta.**

**141.** 357 ÷ 25

**142.** 2.405 ÷ 19

**143.** 78.966 ÷ 47

**144.** 140.536 ÷ 85

**Completa la secuencia.**

**145.** 192, 96, ______ , 24, 12, 6, ______

**146.** 2.500, 500, ______ , 20, ______

**147.** 3.600, ______ , 400

**Halla el factor desconocido en cada caso.**

**148.** $\boxed{\phantom{0}} \times 8 = 104$

**149.** $12 \times \boxed{\phantom{0}} = 132$

**Observa cada una de las siguientes secuencias. Luego, responde.**

12.345.679 × 9 = 111.111.111
12.345.679 × 18 = 222.222.222
12.345.679 × 27 = 333.333.333

**150.** ¿Qué patrón se sigue?

**151.** ¿Por qué número se tendrá que multiplicar 12.345.679 para obtener 888.888.888?

**Lee y responde.**

**152.** Una caja trae diez docenas de marcadores y cada uno vale $1.245. ¿Cuánto vale la caja completa?

**153.** El libro de matemáticas tiene 446 páginas. Si mi hermanito le arranca seis hojas, ¿cuántas hojas le quedan al libro?

**154.** Si subo una escalera de dos en dos doy nueve pasos más que subiendo de tres en tres. ¿Cuántos peldaños tiene la escalera?

**155.** La distancia que hay entre 2 ciudades es de 726 km. ¿Cuánto se debe pagar por el transporte de una mercancía de una ciudad a otra si se sabe que cobran 50 mil pesos por cada 6 km?

**156.** Si una empresa de reciclaje paga $370 por un kilo de papel de archivo, ¿cuántos kilos de papel se deben vender para obtener $99.900?

**157.** Se repartió cierto número de manzanas entre 25 personas y después de dar a cada una 8 manzanas sobraron 7. ¿Cuántas manzanas había?

**158.** Un leñador cobra $4.000 por cortar un tronco en tres partes iguales. ¿Cuánto cobrará por cortarlo en nueve partes iguales?

**Resuelve.**

En el supermercado están promocionando la nueva presentación de un jugo, por lo cual ofrecen 8 jugos por $13.400.

**159.** ¿Cuál es el precio de cada jugo?

**160.** Si el precio original de los ochos jugos es de $16.800, ¿cuál fue el ahorro por cada jugo?

**161. Una ballena azul adulta puede pesar lo que pesan hasta 26 elefantes africanos adultos. Estos pesan aproximadamente 5.000 kg cada uno. Calcula cuántos kilogramos pesa una ballena azul.**

## Potenciación en los números naturales

Actividades | Recurso imprimible

La **potenciación** es una operación que permite escribir, en forma abreviada, productos cuyos factores son todos iguales. Así,

Dados $a$, $b$ y $n \in \mathbb{N}$, se define la potenciación como

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ veces}} = b$$

Y se lee "$a$ elevado a la $n$ es igual a $b$" o "$b$ es la $n$-ésima potencia de $a$".

En la expresión $a^n = b$, $a$ recibe el nombre de base y es el factor que se repite; $n$ recibe el nombre de exponente y es el número de veces que se repite la base; y $b$ recibe el nombre de potencia y es el resultado de multiplicar la base tantas veces como lo indique el exponente.

Por ejemplo, $5^3 = 125$, porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

Algunas potencias reciben nombres especiales. Así, si un número está elevado al exponente 2, se dice que está "elevado al cuadrado"; y si está elevado al exponente 3, se dice que está "elevado al cubo".

Un número natural es cuadrado perfecto cuando es el resultado de elevar otro número natural al cuadrado.

Por ejemplo, 121 es cuadrado perfecto porque $11^2 = 121$.

Un número natural es cubo perfecto cuando es el resultado de elevar otro número natural al cubo.

Por ejemplo, 343 es un cubo perfecto porque $7^3 = 343$.

### EJEMPLOS

**1. Completar la siguiente tabla.**

| Potencia indicada | Producto | Base | Exponente | Potencia | Lectura |
|---|---|---|---|---|---|
| $5^2$ | | | | | |
| | | | | | 3 al cubo es 27 |
| | $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ | | | | |
| | | 10 | 4 | | |

Para completar la tabla se tiene en cuenta la definición de la potenciación en los números naturales. Así:

| Potencia indicada | Producto | Base | Exponente | Potencia | Lectura |
|---|---|---|---|---|---|
| $5^2$ | $5 \times 5$ | 5 | 2 | 25 | 5 al cuadrado es 25 |
| $3^3$ | $3 \times 3 \times 3$ | 3 | 3 | 27 | 3 al cubo es 27 |
| $2^5$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ | 2 | 5 | 32 | 2 a la cinco es 32 |
| $10^4$ | $10 \times 10 \times 10 \times 10$ | 10 | 4 | 10.000 | 10 a la cuatro es 10.000 |

**2. Encontrar el término desconocido en la expresión $3^{\square} = 81$.**

Se halla las primeras potencias de 3. Así: $3^2 = 9$, $3^3 = 27$ y $3^4 = 81$.

Como $3^4 = 81$, entonces, el término desconocido es 4.

**3. Si en un conjunto residencial hay 5 bloques de apartamentos, en cada bloque hay 5 edificios y cada edificio tiene 5 pisos, en los cuales hay 5 apartamentos por piso, ¿cuántos apartamentos hay en el conjunto residencial?**

En este caso, cada cantidad se quintuplica con relación a la anterior. Luego, la cantidad total de apartamentos es una potencia de base 5.

Así: $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.

Por tanto, la cantidad de apartamentos que hay en el conjunto residencial es 625.

## Historia de las matemáticas

**Potencias**

Los babilónicos utilizaban la potenciación como auxiliar de la multiplicación y los griegos sentían especial atracción por los cuadrados y los cubos.

Diofanto en el siglo III a. C. escribía los factores de las potencias uno seguido del otro. Así, para escribir $b^2$ escribía $bb$ y $b^3$ como $bbb$.

Fue Renato Descartes (1596-1650) quien introdujo la notación $b$, $b^2$, $b^3$.

### Propiedades de la potenciación en $\mathbb{N}$

Ampliación multimedia

La potenciación en el conjunto de los números naturales cumple con las siguientes propiedades:

- **Producto de potencias de igual base.** Para multiplicar dos o más potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes. Es decir, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

  Por ejemplo, $3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$.
- **Cociente de potencias de igual base.** Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes. Es decir, $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, con $m > n$.

  Por ejemplo, $7^9 \div 7^4 = \frac{7^9}{7^4} = 7^5$.
- **Potencia de una potencia.** Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes. Es decir, $(a^m)^n = a^{m \times n}$.

  Por ejemplo, $(8^3)^6 = 8^{3 \times 6} = 8^{18}$.
- **Potencia de un producto.** La potencia de un producto es el producto de las potencias de cada uno de sus factores. Es decir, $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.

  Por ejemplo, $(4 \times 3)^2 = 4^2 \times 3^2$.
- **Potencia de un cociente.** La potencia de un cociente es el cociente de las potencias de cada uno de sus términos. Es decir, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

  Por ejemplo, $\left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5^4}{3^4}$.

### El cero y el uno en la potenciación

Cuando la base o el exponente de una potencia son los números 0 o 1, se determinan las siguientes propiedades:

- Todo número natural, diferente de cero, elevado al exponente cero, da como resultado uno. Es decir, $a^0 = 1$, si $a \neq 0$. Por ejemplo, $47^0 = 1$.
- Cero elevado a cualquier número natural, diferente de cero, da como resultado cero. Es decir, $0^n = 0$. Por ejemplo, $0^{19} = 0$.
- Todo número natural elevado al exponente uno, da como resultado el mismo número. Es decir, $a^1 = a$. Por ejemplo, $458^1 = 458$.
- Uno elevado a cualquier número natural, da como resultado uno. Es decir, $1^n = 1$. Por ejemplo, $1^{23} = 1$.

## Matemáticamente

¿Qué resultado tiene la expresión $0^0$?

## EJEMPLOS

**1. Aplicar las propiedades de la potenciación para hallar el resultado de la siguiente expresión** $\dfrac{(2 \times 3)^4}{2^2 \times 3^3}$.

$\dfrac{(2 \times 3)^4}{2^2 \times 3^3}$ Expresión dada.

$= \dfrac{2^4 \times 3^4}{2^2 \times 3^3}$ Se aplica potencia de un producto.

$= 2^{4-2} \times 3^{4-3}$ Se aplica cociente de potencias de igual base.

$= 2^2 \times 3^1$

$= 4 \times 3$

$= 12$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, $\dfrac{(2 \times 3)^4}{2^2 \times 3^3} = 12$.

**2. Determinar el valor de las siguientes potencias de diez, $10^2$, $10^3$, $10^4$, $10^5$ y $10^6$.**

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$

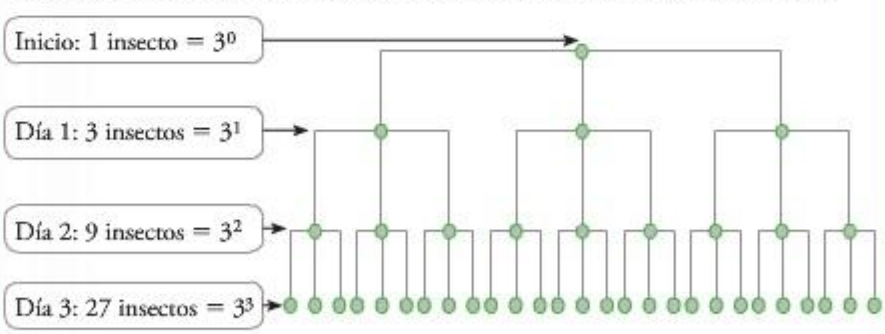
$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000$

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000.000$

Así, el resultado de una potencia de 10 es un 1 seguido de tantos ceros como indique su exponente.

**3. Cierto tipo de insecto pone tres huevos y luego muere; de cada huevo sale otro insecto. Al día siguiente cada nuevo insecto pone otros tres huevos y después muere. Así durante tres días. ¿Cuántos insectos nacieron desde que nació el primero hasta el final del tercer día?**

Para conocer la cantidad de insectos que nacieron, se realiza el siguiente esquema:




Entonces, la cantidad de insectos es:

$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$.

Por tanto, la cantidad de insectos que nacieron en los tres días fue 40.

**Matemáticamente**

¿En qué cifra terminará el resultado de $(4^{20} + 9^{30})$?

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Modelo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

**Escribe la potencia que corresponde en cada caso. Luego, calcula su valor.**

**162.** Cinco elevado a la tres.

**163.** Tres elevado a la cinco.

**164.** Seis elevado a la tres.

**165.** Diez elevado a la seis.

**166.** Uno elevado a la treinta.

**Responde y justifica tu respuesta.**

**167.** ¿En qué casos se cumple que $a^b = b^a$?

**168.** ¿Un número elevado al cubo siempre es más grande que el mismo número al cuadrado?

**169. Completa la siguiente tabla:**

| Base | Exponente | Potencia | Expresión como potencia |
|---|---|---|---|
| | | | $5^3 = 125$ |
| 6 | 4 | | |
| | 3 | 64 | |
| 8 | 2 | | |
| 56 | | 1 | |
| | 1 | 94 | |
| 9 | 5 | | |
| | | | $11^2 = 121$ |
| 1 | 12 | | |

**Aplica las propiedades de la potenciación y simplifica las siguientes expresiones.**

**170.** $4^2 \times 4^4 \times 4$

**171.** $5^7 \div 5^3$

**172.** $(2^3)^2$

**173.** $\dfrac{(21^2)^2}{21^3}$

**174.** $(7^2 \times 7)^0 \times 7^3$

**175.** $(2 \times 2^5 \times 2^0)^4$

**176.** $(4^2 \times 3^2)^3 \div (4 \times 4^2)$

**177.** $\dfrac{3^5 \times 4^8 \times (3^2)^4 \times 4}{(2^3)^2 \times 3^5 \times 4^2}$

**Expresa como producto de potencias de números primos.**

**178.** 25.000 **180.** 128 **182.** 2.700

**179.** 3.200 **181.** 1.600 **183.** 96

**Encuentra el valor desconocido en cada expresión.**

**184.** $4^3 = \square$

**185.** $3^{\square} = 9^2$

**186.** $\square^5 = 3.125$

**187.** $6^{\square} = 216$

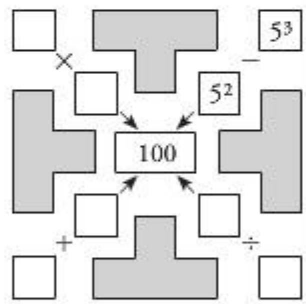
**188.** $2^{\square} = 4^3$

**189.** $\square^4 = 4.096$

**Escribe el resultado de cada operación.**

**190.** $2^2 - 1^2$ **191.** $4^2 - 3^2$

**192. Escribe en cada cuadrado las potencias $30^2$, $8^2$, $1^5$, $3^2$, $10^2$ y $6^2$, de tal forma que de la operación indicada resulte el número del rectángulo.**




**Halla un número natural que cumpla la condición dada en cada caso:**

**193.** Número que al elevarlo al cuadrado y restarle 1 da 63.

**194.** La suma del número y su cuadrado da 30.

**195.** Número que al elevarlo al cuadrado da un número palíndromo (se lee igual al derecho o al revés).

**196.** Número más pequeño que al elevarlo al cuadrado tiene unidades de mil.

**Analiza si son válidas las siguientes igualdades y con base en los resultados plantea una conclusión general para cada caso.**

**197.** $2^3 + 2^5 = 2^8$

**198.** $3^2 + 3^3 = 3^5$

**199.** $(2^3 + 2^5)^2 = 2^6 + 2^{10}$

**200.** $(3^2 + 3^3)^2 = 3^4 + 3^6$

**Resuelve.**

**201.** La velocidad de la luz es 300.000 kilómetros por segundo. Expresa este número como producto de un número por una potencia de 10.

**202.** Un grupo de 15 estudiantes decide organizar una actividad de integración. Para convocar la mayor cantidad de personas, cada alumno debe llamar a tres invitados y cada invitado debe llamar a otras tres personas distintas, ¿cuántos invitados tendrá la actividad?

## Radicación en los números naturales

Actividad Recurso imprimible

La **radicación** es la operación inversa a la potenciación, en la que, conocidos el exponente y la potencia, se debe hallar la base. El signo de la radicación es $\sqrt{\ }$ y recibe el nombre de **signo radical**.

Si $a, b, n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, entonces, $\sqrt[n]{b} = a$ si y sólo si $a^n = b$.

La expresión $\sqrt[n]{b} = a$ se lee raíz *n*-ésima de *b* igual *a*, donde *n* es el índice de la raíz, *b* es la cantidad subradical o radicando y *a* es la raíz *n*-ésima.

Por ejemplo, la expresión $8^3 = 512$ se puede escribir como $\sqrt[3]{512} = 8$, donde 3 es el índice de la raíz, 512 la cantidad subradical y 8 es la raíz cúbica.

Para extraer la raíz exacta de un número natural, se busca un número tal que elevado al índice de la raíz, dé como resultado la cantidad subradical o radicando.

Por ejemplo, $\sqrt[4]{81} = 3$, porque $3^4 = 81$.

Las raíces cuyo índice es 2 se denominan raíces cuadradas. A diferencia de los demás casos, en este tipo de raíces no se escribe el índice.

Por ejemplo,

$\sqrt{400} = 20$ se lee, la raíz cuadrada de 400 es 20.

Las raíces cuyo índice es 3 se denominan raíces cúbicas. Por ejemplo,

$\sqrt[3]{216} = 6$ se lee, la raíz cúbica de 216 es 6.

### Historia de las matemáticas

**La raíz**

La palabra raíz que proviene de la inicial de la palabra *radix*, indicaba la raíz cuadrada de un número.

### Matemática*mente*

¿Cómo se les llama a los números que tienen raíz cuadrada exacta y los números que tienen raíz cúbica exacta?

## EJEMPLOS

**1. Un mueble en forma de cubo, como el que se muestra en la figura, tiene un volumen de 64 dm³. Determinar la altura del mueble.**


Como el mueble tiene forma de cubo, entonces, su volumen está dado por la expresión $V = l^3$, donde $V$ es el volumen y $l$ es la arista del cubo.

Luego, al remplazar el valor del volumen se tiene que: $64 = l^3$.

Ahora, para hallar la altura del cubo, se extrae la raíz cúbica de 64, así:

$l = \sqrt[3]{64} = 4$

Por tanto, la altura del mueble es 4 dm.

**2. Realizar $\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{625}$**

$\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{625} = 2 + 5$ Se extrae la raíz cúbica y la raíz cuarta.

$= 7$ Se suma.

Por tanto, $\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{625} = 7$.

### Propiedades de la radicación en los números naturales

La radicación, en el conjunto de los números naturales, cumple con las siguientes propiedades:

- **Raíz $n$-ésima de un producto.** La raíz $n$-ésima de un producto es igual al producto de las raíces $n$-ésimas de cada uno de los factores. Es decir, $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.
  Por ejemplo, $\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$.
- **Raíz $n$-ésima de un cociente.** La raíz $n$-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces $n$-ésimas de cada uno de los factores. Es decir, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
  Por ejemplo, $\sqrt[4]{\frac{4.096}{16}} = \frac{\sqrt[4]{4.096}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{8}{2} = 4$.

### El cero y el uno en la radicación

Cuando la cantidad subradical de una raíz indicada está relacionada con los números 0 y 1, se determinan las siguientes propiedades:

- La raíz $n$-ésima de 1, da como resultado 1. Así, $\sqrt[n]{1} = 1$, si $n \neq 0$.
- La raíz $n$-ésima de 0, da como resultado 0. Así $\sqrt[n]{0} = 0$, si $n \neq 0$.

## EJEMPLOS

**1. Aplicar las propiedades de la radicación para hallar el resultado de la expresión** $\sqrt[3]{\frac{8 \times 216}{27}}$.

$\sqrt[3]{\frac{8 \times 216}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8 \times 216}}{\sqrt[3]{27}}$ Se aplica raíz $n$-ésima de un cociente.

$= \frac{\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{27}}$ Se aplica raíz $n$-ésima de un producto.

$= \frac{2 \times 6}{3}$ Se extrae la raíz cúbica.

$= 4$ Se realizan las operaciones.

Por tanto, $\sqrt[3]{\frac{8 \times 216}{27}} = 4$

**2. Simplificar la expresión.**

$\sqrt{18} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2}$ Se aplica la raíz de un producto.

$= \sqrt{36}$ Se multiplica.

$= 6$ Se extrae la raíz cuadrada.

Por tanto, $\sqrt{18} \times \sqrt{2} = 6$.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

**Responde y justifica con un ejemplo.**

**203.** ¿Qué es la cantidad subradical?

**204.** ¿Cuál es la relación entre el índice de las raíces y los exponentes de la potenciación?

**205.** ¿Qué propiedad permite determinar la raíz cúbica del producto de tres números?

**206.** ¿Cómo se relacionan los elementos de la potenciación y la radicación?

**Determina en cada caso, el índice, la cantidad subradical, la raíz, la expresión como potencia y la expresión como raíz a partir de los datos dados.**

**207.** Índice: 2 y cantidad subradical: 144.

**208.** Cantidad subradical: 27 y raíz: 3.

**209.** Expresión como potencia: $8^2 = 64$.

**210.** Índice: 4 y raíz: 10.

**211.** Expresión como raíz: $\sqrt{324}$.

**Subraya las raíces exactas y encierra las que no lo son. Justifica la respuesta.**

**212.** $\sqrt{5}$ **215.** $\sqrt[3]{10.000}$ **218.** $\sqrt{0}$

**213.** $\sqrt{25}$ **216.** $\sqrt[3]{81}$ **219.** $\sqrt[3]{9}$

**214.** $\sqrt{10.000}$ **217.** $\sqrt[3]{49}$ **220.** $\sqrt[4]{32}$

**Calcula las siguientes raíces.**

**221.** $\sqrt{16}$ **223.** $\sqrt{144}$ **225.** $\sqrt[5]{1.024}$

**222.** $\sqrt[3]{729}$ **224.** $\sqrt[4]{16}$ **226.** $\sqrt[6]{15.625}$

**Encuentra el valor más pequeño que puede tomar $m$ para que se pueda calcular cada raíz en los números naturales. Explica tu respuesta.**

**227.** $\sqrt{637 - m}$ **230.** $\sqrt{750 + m}$

**228.** $\sqrt[3]{510 + m}$ **231.** $\sqrt[5]{67 - m}$

**229.** $\sqrt[4]{3.100 + m}$ **232.** $\sqrt[4]{1.100 + m}$

**Calcula las siguientes raíces aplicando las propiedades de la radicación.**

**233.** $\sqrt{144 \times 25}$ **237.** $\sqrt[3]{1.000 \div 125}$

**234.** $\sqrt[3]{343 \times 8}$ **238.** $\sqrt[5]{0 \div 25}$

**235.** $\sqrt{64 \times 121 \times 3.600}$ **239.** $\sqrt[4]{4^6 \times 9^2 \times 5^8}$

**236.** $\sqrt[7]{64 \div 8^2}$ **240.** $\sqrt{(144 \div 3^2) \times 4^3}$

**Escribe cada enunciado en forma matemática. Luego, determina si la expresión es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.**

**241.** La raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas.

**242.** La raíz cuadrada de una suma corresponde a la suma de las raíces cuadradas.

**243.** La raíz cúbica de una resta es igual a la resta de las raíces cúbicas.

**244.** La raíz $n$-ésima de la potencia $n$-ésima de un número natural es igual al número.

**Encuentra el valor de $x$ para que la expresión sea correcta.**

**245.** $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{3^x}}} = 3$ **246.** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{8^x}}} = 2$

**Halla los números que faltan en cada igualdad.**

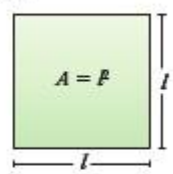
**247.** $\sqrt{\square} = 30$ **249.** $\sqrt[\square]{128} = 2$

**248.** $\sqrt[3]{7 + \square} = 3$ **250.** $\sqrt[4]{1.000 + \square} = 10$

**Lee y responde.**

**251.** Se estima que un cultivo de bacterias crece 10 veces cada hora. Si al cabo de 4 horas hay 160.000 bacterias, ¿cuántas bacterias había inicialmente?

**Observa y resuelve.**




**252.** ¿Cuál es el lado de un cuadrado que tiene 625 $cm^2$ de área?

**253.** ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado de 121 $m^2$ de área?

**Soluciona.**

**254.** ¿Cuánto mide la arista de un cubo que tiene de volumen 216 $cm^3$?

**255.** ¿Cuál es el área de la base de una caja en forma de cubo que tiene de volumen 1.331 $cm^3$?

## Logaritmación en los números naturales

De la misma manera que la radicación, la **logaritmación** es una operación inversa a la potenciación. Esta operación permite hallar el exponente cuando se conocen la base y la potencia. Así:

Dados $a, b, n \in \mathbb{N}$ y $a \neq 1$, entonces, $\text{Log}_a\, b = n$ si y sólo si $a^n = b$.

La expresión $\text{Log}_a\, b = n$ se lee logaritmo en base $a$ de $b$ es igual a $n$.

Por ejemplo, $5^2 = 25$, se puede expresar como $\text{Log}_5\, 25 = 2$.

Los logaritmos cuya base es 10 se denominan logaritmos decimales. A diferencia de los demás logaritmos, en este tipo de logaritmos no se escribe la base. Por ejemplo, $\text{Log}_{10}\, 100 = \text{Log}\, 100 = 2$ y $\text{Log}_{10}\, 1.000 = \text{Log}\, 1.000 = 3$.

## Historia de las matemáticas

**John Napier**

Matemático escocés creador de los logaritmos. En 1614 publicó un libro llamado *Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos*, en el cual plantea su teoría acerca de los logaritmos, pero sin dar a conocer los métodos por los cuales llegó a ellos.

## Propiedades de los logaritmos

La logaritmación en el conjunto de los números naturales, cumple con las siguientes propiedades.

- **Logaritmo de un producto.** El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de cada uno de los factores. Es decir, $\text{Log}_a\, (a \times b) = \text{Log}_a\, a + \text{Log}_a\, b$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_3\, (9 \times 27) = \text{Log}_3\, 9 + \text{Log}_3\, 27 = 2 + 3 = 5$.
- **Logaritmo de un cociente.** El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del dividendo y el divisor. Es decir, $\text{Log}_a\, (a \div b) = \text{Log}_a\, a - \text{Log}_a\, b$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_3\, (27 \div 9) = \text{Log}_3\, 27 - \text{Log}_3\, 9 = 3 - 2 = 1$.
- **Logaritmo de una potencia.** El logaritmo de una potencia es el producto del exponente por el logaritmo de la base. Es decir, $\text{Log}_a\, (a^b) = b \times \text{Log}_a\, a$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_2\, 4^5 = 5 \times \text{Log}_2\, 4 = 5 \times 2 = 10$.

## EJEMPLOS

**1. Calcular los siguientes logaritmos.**

**a.** $\text{Log}_7\, 49$

Como $7^2 = 49$, entonces, $\text{Log}_7\, 49 = 2$.

**b.** $\text{Log}\, 10.000$

Como $10^4 = 10.000$, entonces, $\text{Log}\, 10.000 = 4$.

**2. Encontrar el resultado de la siguiente expresión aplicando las propiedades de los logaritmos: $\text{Log}_2\, (16 \times 8) + \text{Log}_2\, 4^3$.**

$\text{Log}_2\, (16 \times 8) + \text{Log}_2\, 4^3$

$= \text{Log}_2\, 16 + \text{Log}_2\, 8 + 3 \times \text{Log}_2\, 4$ Se aplica logaritmo de un producto y logaritmo de una potencia.

Como $\text{Log}_2\, 16 = 4$, $\text{Log}_2\, 8 = 3$ y $\text{Log}_2\, 4 = 2$, se tiene:

$\text{Log}_2\, (16 \times 8) + \text{Log}_2\, 4^3 = 4 + 3 + 3 \times 2$ Se remplaza el valor de cada logaritmo.

$= 7 + 6$ Se suma y se multiplica.

$= 13$ Se suma.

Por tanto, $\text{Log}_2\, (16 \times 8) + \text{Log}_2\, 4^3 = 13$.

### El cero y el uno en la logaritmación

Cuando los diferentes términos de un logaritmo son los números 0 y 1, se determinan las siguientes propiedades:

- El logaritmo de 1 en cualquier base, es 0. Es decir, $\text{Log}_x\ 1 = 0$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_5\ 1 = 0$.
- El logaritmo en base $x$ de $x$, es 1. Es decir, $\text{Log}_x\ x = 1$.
  Por ejemplo, $\text{Log}_8\ 8 = 1$.
- El logaritmo de 0 en cualquier base, no está definido.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Razono

**Expresa en forma de potencia o en forma de logaritmo según el caso.**

**256.** $3^4 = 81$
**257.** $5^7 = 78.125$
**258.** $\text{Log}_4\ 1.024 = 5$
**259.** $21^3 = 9.261$
**260.** $\text{Log}\ 100.000 = 5$
**261.** $11^4 = 14.641$

**Halla cada logaritmo. Justifica tu respuesta.**

**262.** $\text{Log}_2\ 8$
**263.** $\text{Log}_3\ 81$
**264.** $\text{Log}_7\ 343$
**265.** $\text{Log}_3\ 1$
**266.** $\text{Log}\ 1.000$
**267.** $\text{Log}_5\ 625$
**268.** $\text{Log}_9\ 729$
**269.** $\text{Log}\ 10^8$

**270. Completa la tabla y determina el término desconocido en cada caso.**

| Potenciación | Radicación | Logaritmación |
|---|---|---|
| $6^6 = z$ | $\sqrt[6]{z} = 6$ | $\text{Log}_6\ z = 6$ |
| | | $\text{Log}_7\ 49 = m$ |
| | $\sqrt[7]{128} = z$ | |
| $x^3 = 125$ | | |
| $8^4 = 4.096$ | | |
| | | $\text{Log}_3\ y = 5$ |
| | $\sqrt[6]{4.096} = z$ | |

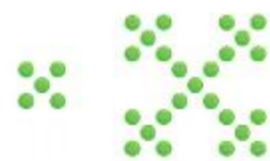
**Completa el número que hace falta:**

**271.** $\text{Log}_3$ ____ $= 5$
**272.** $\text{Log}_6$____ $= 5$
**273.** $\text{Log}\_\ 1.296 = 2$
**274.** $\text{Log}\_\ 49 = 2$
**275.** $\text{Log}\_\ 512 = 3$
**276.** $\text{Log}\_\ 25 = 2$

**Aplica las propiedades de los logaritmos para calcular los resultados:**

**277.** $\text{Log}_3\ (243 \times 243)$
**278.** $\text{Log}_5\ \frac{125}{25}$
**279.** $\text{Log}_2\ (32 \times 64)$
**280.** $\text{Log}_{25}\ 625^8$
**281.** $\text{Log}_4\ (64 \times 1.024)$
**282.** $\text{Log}_6 \left(\frac{216}{36}\right)^5$
**283.** $\text{Log}_2\ (64 \times 512)$
**284.** $\text{Log}_8 \left(\frac{512}{64} \times 4.096\right)^4$

**Observa. Luego, responde.**



**285.** ¿Cuántos puntos tiene la siguiente figura?

**286.** ¿Cuál figura tiene 15.625 puntos?

**Resuelve.**

**287.** Un mensaje de Navidad fue enviado por correo electrónico por una compañía telefónica. Si cada 15 minutos se triplicaba la cantidad de personas que recibían el mensaje, y la última vez se enviaron 59.049 mensajes, ¿cuánto tiempo gastó la compañía en enviar esta cantidad de mensajes?

**288.** Observando la reproducción de una epidemia de un virus de la gripa, un científico verifica que cada hora el virus se divide en cuatro. Si se comienza con un virus, ¿cuántos virus habrá después de 8 horas?

## 2.4 Polinomios aritméticos

Actividad

Ampliación multimedia

Un **polinomio aritmético** es una expresión que combina números naturales mediante diversas operaciones.

Cuando es necesario agrupar algunas de las operaciones se usan los signos de agrupación que se muestran a continuación:

Paréntesis ( )    Corchetes [ ]    Llaves { }

Por ejemplo, las siguientes expresiones son polinomios aritméticos.

$8 + 5 - 6 \div 2 + 3^4 - 7 \times 2 + 5$ y

$4 + [5 - 8 \div 4 + 3^2 + (17 - 2 \times 5 + 1) - 6] - 2$

Para poder resolver expresiones aritméticas es necesario tener en cuenta las siguientes reglas:

- Para resolver una expresión sin signos de agrupación, primero se resuelven las potencias, las raíces y los logaritmos; luego, las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha; finalmente, las adiciones y las sustracciones de izquierda a derecha.
- Para resolver una expresión con signos de agrupación, estos deben ser eliminados de adentro hacia fuera. Para esto, se resuelven las operaciones indicadas dentro de cada uno de ellos siguiendo el orden sugerido en el punto anterior.

**Recuerda que...**

La multiplicación se puede expresar de diferentes formas.

$3 \times 5 = 15$

$3 \cdot 5 = 15$

$3(5) = 15$

$(3)(5) = 15$

### EJEMPLOS

**Resolver cada polinomio aritmético.**

**a.** $\mathbf{8 + 5 - 6 \div 2 + 3^4 - 7 \times 2}$

| | |
|---|---|
| $8 + 5 - 6 \div 2 + 3^4 - 7 \times 2$ | |
| $= 8 + 5 - 6 \div 2 + 81 - 7 \times 2$ | Se resuelve la potencia. |
| $= 8 + 5 - 3 + 81 - 14$ | Se realizan la división y la multiplicación. |
| $= 13 - 3 + 81 - 14$ | Se suma. |
| $= 10 + 81 - 14$ | Se resta. |
| $= 91 - 14$ | Se suma. |
| $= 77$ | Se resta. |

Por tanto, $8 + 5 - 6 \div 2 + 3^4 - 7 \times 2 = 77$.

**b.** $\mathbf{\left\{\sqrt{49} \times 4 + \left[(\log_3 27 + 5 \times 2^3) - 3(\sqrt[3]{64} + 8)\right]\right\} \div 5}$

| | |
|---|---|
| $\left\{\sqrt{49} \times 4 + \left[(\log_3 27 + 5 \times 2^3) - 3(\sqrt[3]{64} + 8)\right]\right\} \div 5$ | |
| $= \{7 \times 4 + [(3 + 5 \times 8) - 3(4 + 8)]\} \div 5$ | Se resuelven raíces, el logaritmo y la potencia. |
| $= \{28 + [(3 + 40) - 3(4 + 8)]\} \div 5$ | Se multiplica. |
| $= \{28 + [43 - 3 \times 12]\} \div 5$ | Se eliminan paréntesis. |
| $= \{28 + [43 - 36]\} \div 5$ | Se multiplica. |
| $= \{28 + 7\} \div 5$ | Se eliminan corchetes. |
| $= 35 \div 5$ | Se eliminan llaves. |
| $= 7$ | Se divide. |

Por tanto, $\left\{\sqrt{49} \times 4 + \left[(\log_3 27 + 5 \times 2^3) - 3(\sqrt[3]{64} + 8)\right]\right\} \div 5 = 7$.

**Matemáticamente**

Coloca los signos $+, -, \times$ y $\div$ entre cada dígito, para que se cumpla la igualdad.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

**Explica.**

**289.** La solución de un polinomio aritmético que no tiene signos de agrupación.

**290.** La solución de un polinomio aritmético que tiene signos de agrupación.

**291.** El orden de prioridad de las operaciones en los números naturales.

**Responde.**

**292.** ¿Por qué son necesarias las reglas para la solución de un polinomio aritmético?

**293.** ¿Cuántos símbolos de agrupación se usan en matemáticas y qué nombre reciben?

**Resuelve los siguientes polinomios aritméticos aplicando el orden de las operaciones.**

**294.** $25 + [4 + (3 + 9)]$

**295.** $(17 + 10 \times 3) - (5 \times 2 - 9)$

**296.** $(10 - 3 + 4 \times 5) - (9 \times 2 + 8)$

**297.** $(13 + 5 - 9) - (4 + 11 - 6 \times 2)$

**298.** $30 - (4 - 2) \times 10 + 5 \times 8$

**299.** $18 + 2 \times (5 + 7) + 3(10 - 7)$

**300.** $3[4 + 2 \times (15 - 11)] - 1$

**301.** $[(6 + 9) \div 5 + (11 - 4 \times 2) - 6]$

**302.** $[(10 + 12 \div 2) - (10 \div 5 - 10 \div 10)] + 6$

**Ubica los paréntesis de tal manera que al realizar la operación se obtenga el resultado propuesto.**

**303.** $2 + 3 \times 5 = 25$

**304.** $5 \times 7 + 4 - 2 = 53$

**305.** $33 + 3 \div 4 - 2 = 7$

**306.** $2 \times 6 - 5 + 5 = 7$

**307.** $6 + 7 + 5 - 5 \times 0 = 0$

**308.** $3^3 - 5^2 \times 5 - 5^0 + 17 \div 3 = 14$

**309.** $6 + 7 + 5 - 5 \times 0 = 18$

**Remplaza los símbolos por números naturales que hagan cierta la expresión:**

**310.** © + 5 × 2 − ⇮ = 14

**311.** 16 − ♥ ÷ 5 = 13

**312.** ♠ × 9 − 6 = 30

**313.** ♧ ÷ ✥ + 9 = 18

**Resuelve.**

**314.** Un alumno eleva al cuadrado un número de dos cifras y obtiene como resultado un número de cuatro cifras que comienza con 3 y termina en 5. Calcula la suma de las cifras del número de dos cifras.

**315.** Escribe el siguiente proceso y confirma el resultado. Piensa en un número mayor que cero, multiplícalo por 3 y añade 1. Luego, multiplica el resultado de nuevo por 3 y añade al producto el número que pensaste. El resultado final termina en 3. Elimina 3 y el número que resulta será el que pensabas.

**Mariana realiza un inventario de los libros que hay en la biblioteca en su casa, y descubre que tiene 11 libros de matemáticas, 15 de religión, 15 de historia, 6 de filosofía.**

**Además, conserva 3 novelas de misterio, 3 de aventura y 3 de fantasía. De todos ellos, 10 se dañaron por la humedad.**

**316.** Completa para calcular la cantidad de libros en buen estado que hay en la casa de Mariana.

| | Libros de matemáticas | | Libros de religión e historia | | Libros de filosofía | | Novelas | | Libros dañados |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | + | 15 × 2 | + | 6 | + | $3^2$ | − | 10 |
| = | 11 | + | _____ | + | 6 | + | ____ | − | 10 |
| = | _____ | | | + | | | _____ | − | 10 |
| = | | | _____ | | | | | − | 10 |
| = | | | | | | | _____ | | |

En la casa de Mariana hay ____ libros en buen estado.

**317.** Si Andrés tiene el doble de la cantidad de libros de Mariana, ¿cuántos libros tiene Andrés?

**Plantea el problema como una operación combinada. Luego, resuelve.**

**318.** Un agricultor cosechó 5.760 kilos de naranjas y 1.500 kilos de mandarinas. Las naranjas se empacan en cajas de 12 kilos y las mandarinas se empacan en cajas de 15 kilos. ¿Cuántas cajas necesita el agricultor para empacar las naranjas y las mandarinas?

# 3. Ecuaciones e inecuaciones

Las ecuaciones están relacionadas con una igualdad y las inecuaciones con una desigualdad.

Una **igualdad** es una expresión que compara dos cantidades mediante el signo igual. Expresiones como $6 + 4 = 10$ y $4^2 = 16$ reciben el nombre de **igualdades numéricas**.

Una **desigualdad** es toda relación que se establece entre números naturales mediante la comparación **menor que** ($<$), **menor o igual que** ($\leq$), **mayor que** ($>$) o **mayor o igual que** ($\geq$).

Una desigualdad se cumple si la relación establecida en ella es verdadera.

Por ejemplo, $2 \times 8 > 15$ y $5^3 < 3^5$ son desigualdades.

## 3.1 Ecuaciones

Actividad · Ampliación multimedia · Recurso imprimible

Una **ecuación** es una igualdad en la que hay presentes una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas**, las cuales se representan con letras minúsculas.

Por ejemplo, las igualdades $3m + 5 = 8$; $x - 3 = 4$; $\frac{21}{z + 2} = 3$ son ecuaciones donde las variables están representadas por $m$, $x$ y $z$.

En una ecuación se pueden identificar dos partes las cuales se encuentran separadas por el signo igual; a la parte de la izquierda del signo $=$ se le llama **primer miembro** y a la que está a la derecha del $=$ se le llama **segundo miembro**.

Así, los elementos de una ecuación son:

$$\overbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Incógnita}}}{8x} + 6}^{\text{Primer miembro}} = \underbrace{52}_{\substack{\text{Segundo} \\ \text{miembro}}}$$

Cada ecuación se cumple para determinados valores de la variable o incógnita presente en ella. Así, la ecuación $2x = 24$ únicamente se verifica para $x = 12$. Este valor se denomina la **solución** de la ecuación.

### Solución de una ecuación

Resolver una ecuación significa hallar el valor o los valores de la incógnita que cumplen con la igualdad dada. Para comprobar dicha solución, basta con remplazar el valor obtenido en la ecuación y verificar si se cumple la igualdad.

El proceso para encontrar la solución de una ecuación se fundamenta en la aplicación de la propiedad uniforme de las igualdades.

Si en los dos miembros de una igualdad se suma, se resta, se multiplica o se divide un mismo número, la igualdad se conserva. Así, si $a = b$ y $c \in \mathbb{N}$, entonces,

$$a + c = b + c \qquad a \times c = b \times c$$

$$a - c = b - c \qquad a \div c = b \div c \text{ para } c \neq 0.$$

### Ecuaciones de la forma $x + a = b$ o $x - a = b$

Este tipo de ecuaciones se resuelven sumando o restando la misma cantidad en los dos miembros de la ecuación para obtener de esta manera otra ecuación equivalente, por ejemplo:

$x + 5 = 8$ Ecuación dada.

$x + 5 - 5 = 8 - 5$ Se resta 5 en ambos miembros de la ecuación.

$x + 0 = 3$ Se resuelven las operaciones en cada lado de la ecuación.

$x = 3$ Se aplica la propiedad modulativa de la adición y se obtiene la solución.

Para comprobar que la solución de una ecuación es la correcta, se remplaza el valor de la incógnita en la ecuación dada y se verifica la igualdad.

En el ejemplo anterior se tiene que: $3 + 5 = 8$. Por tanto, $x = 3$ sí es la solución de la ecuación.

### Ecuaciones de la forma $ax = b$ o $\frac{x}{a} = b$

Esta clase de ecuaciones se solucionan multiplicando o dividiendo los dos miembros de una ecuación por un mismo número, distinto de cero, y se obtiene así otra ecuación equivalente a la primera, por ejemplo:

$7x = 105$ Ecuación dada.

$\frac{7x}{7} = \frac{105}{7}$ Se divide ambos miembros entre el coeficiente de $x$ que es 7.

$1 \cdot x = 15$ Se resuelven las operaciones en cada miembro de la ecuación.

$x = 15$ Se aplica la propiedad modulativa de la multiplicación y se obtiene la solución.

Luego, se comprueba que $x = 15$ es la solución de la ecuación, para ello se remplaza la $x$ por 15 en la ecuación dada así:

$7x = 105$ Ecuación dada.

$7 \cdot 15 = 105$ Se remplaza $x$ por 15.

$105 = 105$ Se verifica la igualdad.

Por tanto, $x = 15$ sí es solución de la ecuación.

**Recuerda que...**

La expresión $7x$ representa un producto, así $7x = 7 \cdot x$, a 7 se le denomina coeficiente.

## EJEMPLO

**Plantear una ecuación, para calcular la masa de cada caja, sabiendo que la masa de cada lata es 20 gramos y la balanza se encuentra en equilibrio.**

Como la masa de cada lata es 20 gramos, entonces, la masa de 6 latas es 120 gramos.

Ahora, si $c$ es la masa de cada caja y como hay 15 cajas, entonces, se tiene que:

$15c = 120$ Se plantea la ecuación.

$\frac{15c}{15} = \frac{120}{15}$ Se divide entre 15.

$c = 8$ Se resuelven las operaciones.

Por tanto, la masa de cada caja es 8 gramos.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

**Responde.**

**319.** ¿Qué es una igualdad numérica?

**320.** Qué es una desigualdad?

**321.** ¿Qué es una ecuación?

**322.** ¿Cuáles tipos de ecuaciones se analizaron?

**323.** ¿Qué significa la solución de una ecuación?

**Explica con un ejemplo:**

**324.** Cómo se aplican las propiedades uniformes de las igualdades en la solución de ecuaciones.

**325.** El proceso para solucionar ecuaciones de la forma $x - a = b$.

**326.** Cómo se verifica la solución de una ecuación.

**Relaciona cada ecuación con su respectiva solución.**

| | |
|---|---|
| **327.** $58q = 348$ | **a.** 4 |
| **328.** $m - 7 = 3$ | **b.** 120 |
| **329.** $12 + n = 16$ | **c.** 6 |
| **330.** $9t = 81$ | **d.** 10 |
| **331.** $r - 50 = 70$ | **e.** 9 |
| **332.** $l \div 7 = 9$ | **f.** 63 |

**Resuelve las siguientes ecuaciones.**

| | |
|---|---|
| **333.** $x + 5 = 16$ | **337.** $32 = x + 8$ |
| **334.** $6m = 90$ | **338.** $y - 17 = 30$ |
| **335.** $3n = 342$ | **339.** $13m = 702$ |
| **336.** $\frac{z}{2} = 48$ | **340.** $\frac{d}{12} = 9$ |

**Observa las figuras y resuelve teniendo en cuenta que las balanzas están en equilibrio.**

**341.** ¿Cuántos patos deben ir en el platillo vacío para que la última balanza esté en equilibrio?

**En un pueblo, donde aún se practica el trueque, se observa lo siguiente:**

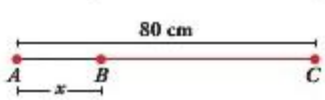

**342.** ¿Cuántos cerdos se necesitan para cambiarlos por 4 vacas?

**Representa cada imagen mediante una ecuación. Luego, determina el valor de $x$ para que las balanzas se encuentren en equilibrio.**

**343.**


**344.**


**345.** Escribe una expresión que represente la longitud del segmento trazado con rojo.




**Inventa un problema que se pueda representar con la ecuación dada. Luego, resuélvelo.**

| | |
|---|---|
| **346.** $3n = 120$ | **348.** $m - 10 = 45$ |
| **347.** $x + 8 = 25$ | **349.** $\frac{x}{4} = 12$ |



Pg. 20

## 3.2 Inecuaciones

Actividad

Una **inecuación** es una desigualdad en la que hay presentes una o varias incógnito desconocidas llamadas variables o incógnitas que se representan con letras minúsculas.

Por ejemplo, las desigualdades $x - 7 < 13$, $5m + 17 > 62$, son inecuaciones y las incógnitas están representadas por $x$ y $m$, respectivamente.

En la desigualdad $x - 7 < 5$, $x$ es un número natural que puede ser 7, 8, 9, 10 y 11.

### Representación de desigualdades

Enlace web

- Los números menores que 8 se pueden determinar en un conjunto, así:
  $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 8\}$ o $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y en la recta numérica como:


- Los números mayores que 4 y menores que 9 se pueden determinar en un conjunto, así:
  $B = \{x/x \in \mathbb{N}, 4 < x < 9\}$ o $B = \{5, 6, 7, 8\}$ y en la recta numérica como:


- Los números mayores que 3 se pueden representar como conjunto, así:
  $C = \{x/x \in \mathbb{N}, x > 3\}$ o $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$ y en la recta numérica como:


Además de la representación de desigualdades, en la solución de una inecuación se aplican las propiedades de las desigualdades.

### Propiedades de las desigualdades

Cuando se tiene una desigualdad en los números naturales, se cumplen las siguientes propiedades:

- Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta un mismo número natural, la desigualdad se mantiene:

  Si $a > b$, entonces, $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.

  Si $a < b$, entonces, $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.

  Por ejemplo:

  $13 > 8$, entonces, $13 + 2 > 8 + 2$, es decir, $15 > 10$.

  $5 < 12$, entonces, $5 - 3 < 12 - 3$, es decir, $2 < 10$.

- Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen entre un mismo número natural, la desigualdad se mantiene:

  Si $a > b$, entonces, $a \times c > b \times c$ y $a \div c > b \div c$

  Si $a < b$, entonces, $a \times c < b \times c$ y $a \div c < b \div c$

  Por ejemplo:

  $69 < 144$, entonces, $\frac{69}{3} < \frac{144}{3}$, es decir, $23 < 48$.

  $18 > 7$, entonces $18 \times 4 > 7 \times 4$ es decir, $72 > 28$.

**Recuerda que...**

Las desigualdades en los números naturales cumplen la **propiedad transitiva**. Es decir, si $a < b$ y $b < c$, entonces, $a < c$, donde $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, $5 < 8$ y $8 < 9$, entonces, $5 < 9$.

## Solución de inecuaciones

Actividad

Resolver una inecuación significa hallar el valor o los valores de la incógnita que cumplen la desigualdad. En el proceso para encontrar la solución de una inecuación se aplican las propiedades de las desigualdades. La solución de una inecuación se puede expresar en forma de desigualdad, nombrando los elementos del conjunto solución o gráficamente en la recta numérica.

### EJEMPLOS

**1. Resolver las siguientes inecuaciones.**

**a.** $x + 8 < 11$

$x + 8 - 8 < 11 - 8$ Se resta 8 a ambos miembros de la inecuación.

$x + 0 < 3$ Se realizan las operaciones.

$x < 3$ Se suma.

La representación en la recta numérica de la solución de la desigualdad $x + 8 < 11$, es:


Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad $x + 8 < 11$ es $\{0, 1, 2\}$.

**b.** $5x + 6 > 26$

$5x + 6 - 6 > 26 - 6$ Se resta 6 a ambos miembros de la inecuación.

$5x > 20$ Se realizan las operaciones.

$\frac{5x}{5} > \frac{20}{5}$ Se divide entre 5 cada miembro de la inecuación.

$x > 4$ Se resuelven las divisiones.

La representación en la recta numérica de la solución de la desigualdad $5x + 6 > 26$, es:


Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad $5x + 6 > 26$ es $\{5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$.

**2. Juan colecciona aviones de juguete. Si gana 3 aviones, su colección superará los 20 aviones; pero, si pierde 9 de la cantidad que tiene, le quedarán menos de 10, ¿cuántos aviones puede tener Juan en su colección?**

Si $x$ es la cantidad de aviones que tiene Juan en su colección, entonces, se tiene que:

$x + 3 > 20$ Se plantea la inecuación.

$x + 3 - 3 > 20 - 3$ Se resta 3 a ambos miembros de la inecuación.

$x > 17$ Se resuelven las operaciones.

$x - 9 < 10$ Se plantea la inecuación.

$x - 9 + 9 < 10 + 9$ Se suma 9 a ambos miembros de la inecuación.

$x < 19$ Se resuelven las operaciones.

Como, $x > 17$ y $x < 19$, entonces, $17 < x < 19$.

Luego, la solución de la inecuación $17 < x < 19$ es $x = 18$.

Por tanto, Juan tiene 18 aviones en su colección.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Soluciono problemas

**Responde.**

**350.** ¿Qué es una inecuación?

**351.** ¿Cuál es la diferencia principal entre solucionar una ecuación y solucionar una desigualdad?

**352.** ¿Cuántos símbolos se utilizan para representar una desigualdad y cómo se representan?

**353.** ¿Cómo se representa la solución de una inecuación en la recta numérica?

**Escribe la desigualdad que representa cada balanza.**

**354.**

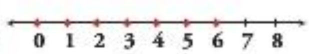

**356.**


**355.**

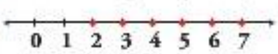

**357.**


**Escribe la inecuación relacionada con la representación de la recta en cada caso.**

**358.**




**359.**




**Resuelve las siguientes desigualdades expresando la solución en forma de conjunto y en la recta numérica.**

**360.** $x + 9 > 16$

**361.** $x + 15 \leq 21$

**362.** $15m \geq 90$

**363.** $60m < 720$

**364.** $70 > y + 40$

**365.** $8x - 24 > 24$

**366.** $32 < x + 8$

**367.** $25 + 5y \geq 30$

**368.** $94 < 2m + 36$

**369.** $35m - 490 < 210$

**Las medidas de los lados de un triángulo deben cumplir una importante propiedad que se conoce como desigualdad triangular, la cual consiste en que la suma de dos lados cualesquiera del triángulo siempre debe ser mayor que el otro lado.**

**370.** Si $a$, $b$, $c$ son las medidas de los lados de un triángulo expresa las tres desigualdades posibles que se derivan de la desigualdad triangular.

**371.** Proponga valores posibles de $a$, $b$ y $c$ para formar un triángulo.

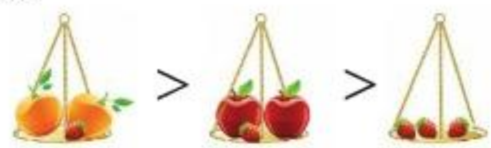
**372.** Proponga valores posibles de $a$, $b$ y $c$ para que no exista un triángulo con tales medidas.

**373. Completa la tabla.**

| Conjunto solución | Inecuación |
|---|---|
| {0, 1, 2, 3, 4} | |
| {…, 27, 28, 29, 30} | |
| {108, 109, 110, …} | |
| {34, 35, 36} | |

**Resuelve.**

Los tres platillos están ordenados de mayor a menor peso.



**374.** ¿Dónde ubicarías este platillo?

**Luis y Pedro juegan canicas los miércoles en la tarde. Si entre los dos tienen menos de 10 canicas, pero no tienen el mismo número de canicas:**

**375.** Representa mediante una desigualdad las canicas que tienen Pedro y Luis juntos.

**376.** Determina cuatro valores posibles de las canicas que tiene Luis y que tiene Pedro de tal forma que cumplan la condición planteada.

**377.** ¿Cuántos valores son posibles para el número de canicas que tienen Pedro y Luis?

**378.** Un terreno de forma rectangular tiene 19 m de largo, ¿cuál debe ser el ancho para que el perímetro sea mayor a 98 m?

EJERCICIOS PARA REPASAR

## Sistema de numeración

En la tabla se registra el área en km² de los seis países más grandes del mundo.

| País | Área (km²) |
|---|---|
| Canadá | 9.330.970 |
| Brasil | 8.456.510 |
| Rusia | 17.075.400 |
| China | 9.326.410 |
| Australia | 7.617.930 |
| EE. UU. | 9.166.600 |

**379.** ¿Cuál es el país con mayor área?

______________________

**380.** ¿Cuál es el tercer país más grande del mundo?

______________________

**381.** ¿Qué países tienen mayor área que China?

______________________

**382.** Escribe en notación polinómica el área de los dos países más pequeños que se indican en la tabla.

______________________

**383.** ¿Cuáles son los países cuyas unidades de millón en sus áreas son iguales?

______________________

Expresa cada número en base 10.

**384.** $1001_2$: __________ **386.** $11101_2$: __________

**385.** $100101_2$: __________ **387.** $111011_2$: __________

Expresa cada número en base dos.

**388.** 45: __________ **390.** 144: __________

**389.** 63: __________ **391.** 128: __________

## Conjunto de los números naturales

**392.** Utiliza como máximo una sola vez los dígitos 1, 2, 3, los signos de agrupación y las operaciones +, −, ×, ÷ para encontrar expresiones cuyo resultado sea cada uno de los dígitos.

**393.** Aplica la propiedad indicada y calcula.

Conmutativa
- $17 + 23 =$ __________
- $32 \times 5 =$ __________

Asociativa
- $(73 + 17) + 8 =$ __________
- $(12 \times 2) \times 4 =$ __________

Distributiva
- $7 \times (15 - 13) =$ __________
- $(27 + 3) \times 3 =$ __________

**394.** En una finca hay: 580 árboles de naranja, 205 árboles de toronja y 490 limoneros. En una temporada de lluvia se perdieron 107 de estos árboles frutales.

¿Cuántos árboles quedaron en la finca?

Relaciona cada operación con su respectivo resultado.

**395.** $812.562.351 - 712.548.958$ **a.** 100.938.502

**396.** $128.245.740 \div 12$ **b.** 1.054

**397.** $(7^2 \times 3^3)^2$ **c.** 100.013.393

**398.** $25.658.639 + 75.279.863$ **d.** 1.750.329

**399.** $\sqrt{1.110.916}$ **e.** 10.796.792

**400.** $25.768 \times 419$ **f.** 10.687.145

**401.** Un pliego de cartulina tiene 80 cm de largo y 60 cm de ancho. Si se quiere dividir en ocho rectángulos iguales manteniendo el ancho, ¿cuáles son las dimensiones de los rectángulos resultantes?

**402.** Encuentra cuatro dígitos diferentes $M$, $N$, $P$, $Q$ de tal manera que los números de tres cifras $NMQ$ y $MNP$ sean cubos perfectos.

**Completa aplicando las propiedades de la potenciación.**

**403.** $7^4 \times 7^{\square} \times 7 = 7^7$

**404.** $\square^5 \div \square^2 = 6^{\square}$

**405.** $(7^4)^{\square} = \square^{12}$

**406.** $\square^9 \div 8^{\square} = 8^3$

**407.** $(\square^{\square})^3 = 13^6$

**408.** $8^3 \times 8^5 \times 8^{\square} = 8^{12}$

**Relaciona las dos expresiones que tengan el mismo resultado.**

**409.** $\sqrt{9} + 3 \cdot 5 - 2 + 8 \cdot 2$

**410.** $3^3 \cdot 2 \cdot 5 + 5$

**411.** $3 + 2^2 \cdot 5 + 6$

**412.** $9 + 5(12 - 2) + 8$

a. $(3 + 7) - 2 \cdot 3 + 5^2$

b. $5 \cdot 6 - 36 \div 18 + 5 \cdot 0 + 2^2$

c. $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{\sqrt{81}} + 2^2 \cdot 3^2 + 5^0$

d. $5\{4 + 9(2 + 3) + 2(6 - 3)\}$

**Están en el estreno de la mejor película del año y toda la familia Páez decide ir a verla. Si en la familia hay 3 adultos y cuatro niños y el valor de la boleta de entrada para adulto es de \$10.000 y la de niño es de \$6.000:**

**413.** Determina el polinomio aritmético que representa el valor que se va a pagar por todas las boletas. Luego, resuélvelo.

**414.** Si la familia Páez paga con 3 billetes de \$5.000, dos billetes de \$10.000 y un billete de \$20.000, ¿cuánto dinero le devuelven?

**Escribe $<$, $>$ o $=$ según corresponda.**

**415.** $(7^0)^3 \; \square \; \text{Log}_6 6$

**416.** $\sqrt[4]{27 \times 3} \; \square \; 9^2$

**417.** $\text{Log}_5 (25 \times 5) \; \square \; \text{Log}_5 (25 \div 5)$

**418.** $\text{Log } 100 \; \square \; 10^3$

**419.** $\text{Log}_8 512 - \text{Log}_8 64 \; \square \; (8^0)^5$

**420.** $3^5 \; \square \; 5^3$

**421.** $\text{Log}_2 16^2 \; \square \; \sqrt{16}$

**422.** $\sqrt[5]{7^5} \; \square \; (7^2)^7 \div 7^7$

## Ecuaciones e inecuaciones

**Resuelve las siguientes ecuaciones.**

**423.** $x + 3 = 17$

**424.** $7n = 126$

**425.** $\frac{a}{2} = 13$

**426.** $3 + 4b = 27$

**Resuelve las siguientes desigualdades expresando la solución en forma de conjunto y en la recta numérica.**

**427.** $x - 5 > 21$

**428.** $3n + 5 < 32$

**429.** César dice: "Mi edad dentro de 5 años será mayor que 20 años, y pensar que hace 6 años todavía no cumplía 11 años". ¿Qué edad tiene César?

# PROBLEMAS PARA REPASAR

Para construir un mueble como el que se muestra en la imagen, un carpintero necesita lo siguiente:

4 tablas largas de madera, 6 tablas cortas de madera, 12 ganchos pequeños, 2 ganchos grandes y 24 tornillos. Si en el almacén hay 26 tablas largas, 33 tablas cortas, 200 ganchos pequeños, 20 ganchos grandes y 510 tornillos,

**¿Cuántos muebles completos se pueden construir?**

**Paso 1** Comprende el problema.

**¿Cuáles son las preguntas del problema?**

¿Cuántos muebles completos se pueden construir?

**¿Cuáles son los datos del problema?**

Materiales para la construcción de un mueble:

| Tablas largas | Tablas cortas | Ganchos pequeños | Ganchos grandes | Tornillos |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 6 | 12 | 2 | 24 |

Materiales en el almacén:

| Tablas largas | Tablas cortas | Ganchos pequeños | Ganchos grandes | Tornillos |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 26 | 33 | 200 | 20 | 510 |

**Paso 2** Elabora un plan y llévalo a cabo.

**Primero,** se divide los respectivos materiales para calcular la cantidad de muebles que se pueden construir, así:

| Tablas largas | Tablas cortas | Ganchos pequeños | Ganchos grandes | Tornillos |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $\begin{array}{r\|l} 26 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$ | $\begin{array}{r\|l} 33 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$ | $\begin{array}{r\|l} 200 & 12 \\ \cline{2-2} 8 & 16 \end{array}$ | $\begin{array}{r\|l} 20 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 10 \end{array}$ | $\begin{array}{r\|l} 510 & 24 \\ \cline{2-2} 6 & 21 \end{array}$ |

**Luego,** con 26 tablas largas se pueden construir 6 muebles. Con 33 tablas cortas se pueden construir 5 muebles. Con 200 ganchos pequeños se pueden construir 16 muebles. Con 20 ganchos grandes se pueden construir 10 muebles. Con 510 tornillos se pueden construir 21 muebles.

Se escoge la menor cantidad de muebles. Es decir, con los materiales del almacén es posible construir 5 muebles completos.

**Paso 3** Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que los materiales del almacén permiten la construcción de 5 muebles. Luego, se tiene que con 26 tablas largas, 33 tablas cortas, 200 ganchos pequeños, 20 ganchos grandes y 510 tornillos es posible construir 5 muebles completos como el que se muestra en la imagen.

**Resuelve las preguntas 430 y 431, de acuerdo con la siguiente información.**

Si Miriam tuviera 12 años menos tendría 48 años. Si Juan tuviera 13 años más tendría 23 años.

**430.** ¿Cuántos años más joven es Juan que Miriam?

**431.** ¿Cuánto sumarán sus edades dentro de 5 años?

A bordo del minisubmarino Mir-1, los rusos plantaron su bandera en el fondo del mar Ártico, a 4.200 metros de profundidad. Mir-1 es capaz de descender 30 metros por minuto.

**432.** ¿Cuántos minutos le tomó al minisubmarino llegar al fondo del mar?

**433.** Un comerciante compró 18 cuadernos a $16.500 cada uno, vendió 6 de ellos por $11.860 en total. ¿A qué precio debe vender los cuadernos que le quedan para obtener una ganancia total de $4.500?

**434.** Una fábrica cuenta con nueve máquinas para etiquetado de botellas de agua mineral. Cada máquina etiqueta 720 botellas por hora y trabaja 8 horas al día por 5 días a la semana. En una semana, dos de esas máquinas estaban en reparación durante 3 días.

¿Cuántas botellas fueron etiquetadas esta semana?

**Resuelve las preguntas 435 a 439, de acuerdo con la siguiente información.**

En una sala de Internet que se llama Inter.com cobran $20 por el minuto de servicio. Mientras que en una sala vecina, que se llama Expresi@comunicacion, cobran por 1 hora $1.000, por media hora $500 y por un cuarto de hora o menos, $300.

**435.** ¿Cuánto hay que pagar por media hora de servicio en cada sala de Internet? ____________

**436.** ¿Cuánto hay que pagar por 48 minutos?

**437.** Si Carlos tiene $750, ¿cuántos minutos puede alquilar de Internet en cada sala?

**438.** ¿A cuál sala es más económico ir por media hora de servicio? ____________

**439.** Expresa como desigualdades la tabla de precios de Expresi@comunicacion para una hora.

**440.** En una caja como la de la figura, Pedro distribuye canicas, en la primera casilla, coloca una canica y, en cada una de las casillas siguientes, dos veces el número de canicas de la anterior.

¿Cuántas canicas coloca Pedro en la octava casilla?

Un jardín rectangular que tiene dimensiones 50 metros de largo por 10 metros de ancho está encerrado con una cerca de madera. Para hacer un jardín más grande, se usa la misma cerca para encerrar un terreno cuadrado.

**441.** ¿Cuál es la diferencia en metros cuadrados entre el área del jardín rectangular y el jardín cuadrado?

# ...Para identificar un producto por medio del código de barras.

Galería de imágenes

El **código de barras o de seguridad** es un sistema de identificación que tienen los productos del mercado, el cual ofrece información general del producto como país de fabricación, nombre de la empresa y consecutivo del producto fabricado. Este código identifica y caracteriza el producto sin necesidad de observar su contenido, además es global y por ello puede ser reconocido en cualquier parte del mundo.

El código de barras consiste en un conjunto de signos formado por una serie de líneas y números asociados a ellas, que se pone sobre los productos de consumo y que se utiliza para la gestión informática de las existencias.

Luego, un código de barras consiste en 13 dígitos que se relacionan con un esquema de líneas en la parte superior y contiene la siguiente información:

Los dos primeros dígitos son el código del país.

Los cinco dígitos que siguen, se refieren al número del producto.

7 7 02560 02493 1

Los cinco dígitos siguientes son la referencia del fabricante.

El último dígito es de control y se obtiene mediante un algoritmo matemático.

El dígito de control se obtiene así:

| | |
|---|---|
| $7 + 2 + 6 + 0 + 4 + 3 = 22$ | Se suman las posiciones pares del código. |
| $22 \times 3 = 66$ | Se multiplica por 3 la suma anterior. |
| $7 + 0 + 5 + 0 + 2 + 9 = 23$ | Se suman las posiciones impares. |
| $66 + 23 = 89$ | Se suman el producto obtenido con la suma de las posiciones impares. |
| $90 - 89 = 1$ | Se le resta a la decena inme diata superior el resultado anterior. |

Por tanto, el dígito de control para este producto es 1.

1. **Comprueba que el código de barras es correcto para el producto que se muestra a continuación.**

2. **El código QR (*quick response barcode*) es un código de barras en dos dimensiones. Consulta cómo se creó este código y en qué tipo de productos se utiliza. Luego, explica lo que encuentres a tus compañeros.**

3. **Identifica las diferencias y similitudes que hay entre los códigos de barras de los siguientes productos y el código de barras del ejemplo citado.**




Pg. 28

# ...Para registrar y comparar las operaciones aeroportuarias.

El nuevo aeropuerto 'El Dorado o Luis Carlos Galán' es un proyecto ambicioso que pretende renovar las operaciones aeroportuarias en la capital del país y generar una *megapolis* en la región.

El problema actual del aeropuerto es su poca capacidad para recibir la cantidad de pasajeros y de carga que llega actualmente al país. Por tal razón se hace necesario ampliar su estructura para mejorar las operaciones de comunicación y la actividad comercial con gran parte del país y el exterior.

A continuación se muestra la tabla con las estadísticas de operación del aeropuerto antes de estrenar su nueva cara.

| | Nacional | | | Internacional | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Año | Pasajeros | Ton. Carga y correo | Operaciones comerciales | Pasajeros | Ton. Carga y correo | Operaciones comerciales |
| 2007 | 8.443.967 | 119.958 | 149.310 | 4.384.055 | 474.207 | 50.114 |
| 2008 | 8.807.325 | 110.979 | 160.188 | 4.649.360 | 467.839 | 52.375 |
| 2009 | 10.278.244 | 91.811 | 170.785 | 4.621.010 | 421.031 | 53.024 |

De acuerdo con las proyecciones, los cambios a nivel nacional no son considerables respecto a cantidad de pasajeros y carga. Por ejemplo, el total de pasajeros que serán movilizados para el 2015 está estimado en 13 millones y, para el 2020, se espera un movimiento de 16 millones de pasajeros.

En cuanto a la carga en toneladas presupuestada para 2015 y 2020 se muestra en la siguiente tabla.

| 2015 | | 2020 | |
|---|---|---|---|
| Internacional | Nacional | Internacional | Nacional |
| 510.000 | 120.000 | 600.000 | 130.000 |

Con el fin de incrementar la capacidad que tiene el aeropuerto actualmente, se pretende aumentar el área de las terminales aéreas de 54.000 $m^2$ a 134.000 $m^2$, la zona de abordaje, de 36.000 $m^2$ a 68.000 $m^2$ y el número de puentes de abordaje, de 21 a 33. Así, se busca prestar un mejor servicio y brindar mayor comodidad a los pasajeros, y aumentar la eficiencia del transporte de mercancía.

1. **En el 2007, ¿cuál fue la diferencia de operaciones comerciales a nivel nacional e internacional?**
2. **Respecto al 2008, ¿qué diferencia de pasajeros totales movilizados hay en relación con las proyecciones de 2015 y 2020?**
3. **Halla la diferencia de toneladas de carga movilizadas entre 2007 y 2009 tanto en trayectos nacionales como internacionales. ¿Qué puedes concluir de los resultados obtenidos?**
4. **Para el 2020, ¿cuántos pasajeros logrará movilizar aproximadamente cada puente de abordaje?**
5. **¿La diferencia de mercancía que se movilizó en el aeropuerto El Dorado durante el 2009 es considerable respecto a la proyección para el 2020?**
6. **¿Crees necesaria la renovación del aeropuerto El Dorado de acuerdo con los resultados obtenidos?**
7. **¿Qué solución propondrías para mejorar el transporte aéreo en Colombia?**

# 3 Teoría de números

**Estándares: pensamientos numérico y variacional**

## → Tu plan de trabajo...

- Reconocer y aplicar los conceptos de **múltiplo y divisor en los números naturales**.
- Identificar **números primos y compuestos**.
- Aplicar los conceptos de la teoría de números para expresar un número como el producto de **factores primos**.
- Calcular el **mcm** y el **mcd** de varios números y aplicarlos en la solución de problemas.

## Encuentra en tu Libromedia

**Evaluaciones:**

✓ De desempeño ✓ Por competencias

| | |
|---|---|
| **6** Multimedia | **1** Audio |
| **1** Galería | **4** Imprimibles |
| **8** Actividades | **2** Enlaces web |

## Lo que sabes...

Selecciona la opción correcta.

**1.** Los factores en el producto $2 \times 3 \times 13 = 78$ son:

**a.** 2, 3 y 78 **c.** 2, 3 y 13

**b.** 3 ,13 y 78 **d.** 2, 13 y 78

**2.** El total de libros que hay en 12 repisas que contienen 15 libros cada una es:

**a.** 180 **b.** 120 **c.** 150 **d.** 170

**3.** El conjunto de todos los divisores exactos de 24 es:

**a.** 1, 3, 6, 12, 24 **c.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12

**b.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 **d.** 2, 4, 6, 8, 12, 24

**4.** Determina la división que es exacta.

**a.** $8 \div 3$ **c.** $236 \div 18$

**b.** $96 \div 12$ **d.** $181 \div 18$

## Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

### ...Para comprender cómo funciona la seguridad en informática.

Antiguamente se creía que los números primos no tenían una aplicación específica en contextos reales. Sin embargo, en la actualidad son parte fundamental de la criptografía y por eso se aplican para transmitir información digital de manera segura.

Lee más acerca de este tema en la página 114.

## Cronología de teoría de números

**Babilonia.** Para realizar obras arquitectónicas y agrícolas, fue necesario construir un sistema numérico útil.

**México.** Los mayas evidenciaban el conocimiento del mcm en su calendario tzolkin donde repiten 20 nombres en ciclos de 13 y 20 elementos, hasta coincidir nuevamente en el día 260 que es el mcm de estos números.

**Grecia.** Eratóstenes desarrolla un procedimiento para encontrar los números primos denominado la criba.

**Grecia.** En el libro *Los elementos*, Euclides postuló que los números primos son infinitos e indicó el algoritmo para hallar el mcd de forma eficiente y exacta.


**Italia.** Se generó el problema más complicado para el algoritmo de Euclides cuando se deseaba hallar el mcd de dos números consecutivos de la serie de Fibonacci.

**Inglaterra.** Se construyeron máquinas sistemáticas para evaluar polinomios que utilizaban algoritmos como la criba y el de Euclides.

# 1. Múltiplos

Enlace web

Una de las grandes preocupaciones de los matemáticos ha sido el estudio de las propiedades que existen en los números naturales. Hoy en día el conocimiento de las propiedades de los naturales contribuye a la solución de problemas cotidianos y se aplica en la programación de computadores, entre otros usos.

## 1.1 Múltiplos de un número

Actividad

Los **múltiplos** de un número *a* son todos aquellos números que resultan de multiplicar *a* por todos los números naturales, incluyendo el cero.

El conjunto de los múltiplos de un número *a* se simboliza $M_a$.

Por ejemplo, para hallar los múltiplos de 4 se realizan las multiplicaciones $4 \times 0, 4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 3, 4 \times 4, 4 \times 5, 4 \times 6, \ldots$

Este conjunto se nota $M_4$ y se puede determinar así:

Por extensión $M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots.\}$

Por comprensión $M_4 = \{x/x \text{ es un múltiplo de } 4\}$.

## 1.2 Propiedades de los múltiplos

Los múltiplos de un número cumplen las siguientes propiedades:

- Todo número es múltiplo de sí mismo.
- Cero es múltiplo de todo número.
- El conjunto de múltiplos de un número es infinito.

**EJEMPLOS**

**1. Lina tiene una regla no graduada que mide 7 cm, ¿qué longitudes exactas puede medir con esta regla?**

Para determinar las longitudes que se pueden medir con esta regla, se deben calcular los múltiplos de 7 a excepción del cero.

| | | |
|---|---|---|
| $7 \times 1 = 7$ | $7 \times 2 = 14$ | $7 \times 3 = 21$ |
| $7 \times 4 = 28$ | $7 \times 5 = 35$ | $7 \times 6 = 42$ |
| $7 \times 7 = 49$ | $7 \times 8 = 56$ | $7 \times 9 = 63$ |

Luego, los múltiplos de 7, a excepción de cero, son:

$$M_7 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, \ldots\}$$

**Luego,** las longitudes que se pueden medir con esta regla son 7 cm, 14 cm, 28 cm, 35 cm, 42 cm, 49 cm, 56 cm, 63 cm,…

**2. El folleto de un almacén de ropa tiene más de 7 páginas y menos de 22 páginas.**

**Además, el número de páginas del folleto es múltiplo de 3 y múltiplo de 5. ¿Cuántas páginas tiene el folleto?**

**Primero,** se hallan los múltiplos de cada número.

Los múltiplos de 3 mayores que 7 y menores que 22 son 9, 12, 15 y 18.

Los múltiplos de 5 mayores que 7 y menores que 22 son 10, 15 y 20.

**Luego,** se busca el número que cumpla las dos condiciones.

En este caso el número que cumple las dos condiciones es 15.

**Por tanto,** el folleto tiene 15 páginas.

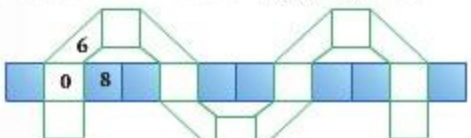
## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

**Responde las preguntas. Justifica tus respuestas.**

1. ¿Todo múltiplo de un número par es par?
2. ¿Todo múltiplo de un número impar es impar?
3. ¿Cuál es el múltiplo más pequeño que tiene un número natural?
4. ¿El conjunto de múltiplos de un número se puede ordenar?
5. ¿Los múltiplos de un número $k$ se obtienen al multiplicar $k$ por los números naturales?

**Escribe los primeros múltiplos de 6 en la tira verde y los de 8 en la tira azul. Luego, responde.**




6. ¿Qué característica tienen los números que se ubican donde se cruzan las tiras?
7. ¿Cuál es el número más pequeño distinto de 0 que se ubica donde se cruzan las tiras?

**Halla los diez primeros elementos de los siguientes conjuntos.**

8. $M_2$
9. $M_3$
10. $M_5$
11. $M_6$
12. $M_8$
13. $M_{10}$

**Escribe V, si la expresión es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu elección en cada caso.**

14. 0 es múltiplo de 100. ( )
15. 500 es múltiplo de 500. ( )
16. 20 es múltiplo de 2 y de 5. ( )
17. 15 no es múltiplo de 5 y de 10. ( )

**Otra forma de definir el múltiplo de un número es esta.**

El múltiplo de un número es el que lo contiene un número exacto de veces. De acuerdo con esta definición completa las siguientes expresiones de manera que sean verdaderas.

18. 48 es múltiplo de 16, porque lo contiene ______ veces.
19. 240 es múltiplo de 20, porque lo contiene ______ veces.

20. **Determina de qué número son múltiplos los números del conjunto $M_a$.**

$$M_a = \{\ldots, 36, 45, 54, 63, 72, 81, \ldots\}.$$

**Responde las preguntas y justifica tus respuestas.**

21. ¿En dónde hay más múltiplos de 2, entre 11 y 21 o entre 10 y 20?
22. ¿En dónde hay menos múltiplos de 3, entre 3 y 15 o entre 9 y 19?

**Halla el número o los números que cumplan con cada grupo de condiciones.**

23. Par menor que 20. Múltiplo de 2 y múltiplo de 5.
24. Impar mayor que 15 y menor que 30. Múltiplo de 3 y múltiplo de 6.
25. Par mayor que 18 y menor que 36. Múltiplo de 4 y múltiplo de 16.
26. Múltiplo de 2, 5 y 10 menor que 50.
27. El múltiplo más pequeño de 3, 5 y 10 diferente de 0.

**Resuelve.**

En un torneo de fútbol se asignan puntajes a los equipos de la siguiente forma.

5 por partido ganado, 3 por partido empatado y 2 por partido perdido. El puntaje de sexto está entre 40 y 50. Además, es múltiplo de 3 y 5.

28. Determina el puntaje de sexto.
29. En un consultorio a cada paciente se le entrega una ficha que contiene un múltiplo de 3. Gabriela es la paciente 19 en la fila. Determina el número que contiene la ficha de Gabriela.
30. Un cajero automático utiliza billetes cuya denominación es \$10.000, \$20.000 y \$50.000. ¿Cuántos billetes y de qué denominación entregará a una persona que hace un retiro de \$600.000 y que además recibe la menor cantidad de billetes?

# 2. Divisores

En el estudio de la teoría de números es importante conocer el concepto de divisor, sus propiedades y algunos criterios de divisibilidad. Los cuales se utilizan frecuentemente en la descomposición de factores primos.

## 2.1 Divisores de un número

**Matemáticamente**

¿Sabes alguna manera para determinar los divisores de un número?

Los divisores de un número $a$ son todos aquellos números que dividen exactamente dicho número. El conjunto de divisores de un número $a$ se simboliza $D_a$.

Por ejemplo, el conjunto de los divisores de 8 se puede determinar por extensión como $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$ y por comprensión como $D_8 = \{x/x$ es múltiplo de $8\}$.

## 2.2 Propiedades de los divisores de un número

Los divisores de un número cumplen las siguientes propiedades:

- Todo número es divisor de sí mismo.
- Uno es divisor de todo número.
- El conjunto de divisores de un número es finito.

### EJEMPLOS

**1. Determinar todos los divisores de 6.**

**Primero,** se realiza la división de 6 entre los números naturales menores o iguales que 6.

| | |
|---|---|
| $6 \div 1 = 6$, residuo 0 | $6 \div 2 = 3$, residuo 0 |
| $6 \div 3 = 2$, residuo 0 | $6 \div 4 = 1$, residuo 2 |
| $6 \div 5 = 1$, residuo 1 | $6 \div 6 = 1$, residuo 0 |

**Luego,** se eligen los números de los que se obtienen divisiones exacta, en este caso: 1, 2, 3, 6.

**Finalmente,** se obtiene que el conjunto de los divisores de 6 es $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$.

**2. Resolver la siguiente situación.**

16 jóvenes van de campamento a una laguna; ellos quieren formar grupos con el mismo número de personas sin que sobre ninguno. ¿Cuántas personas pueden estar en cada grupo?

**Primero,** se divide 16 entre los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16.

**Luego,** se eligen los números cuyas divisiones resultaron exactas. En este caso: $D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

**Finalmente,** se concluye que los jóvenes del campamento pueden hacer grupos de 1, 2, 4, 8 o 16.

**3. Probar que se cumplen las propiedades de los divisores, con el conjunto de divisores de 9.**

- 9 es divisor de 9 porque la división es exacta. Se cumple la propiedad que indica que todo número es divisor de sí mismo.
- 1 es divisor de 9 porque la división es exacta. Se cumple la propiedad que indica que 1 es divisor de todo número.
- Los divisores de 9 son el conjunto de $D_9 = \{1, 3, 9\}$, formado únicamente por tres elementos. Se cumple la propiedad que dice que el conjunto de divisores de un número es finito.

**4. El conjunto de divisores propios de un número es aquel que incluye a los divisores del número sin el número. Por ejemplo, los divisores propios de 8 son 1, 2, 4. Un número perfecto es aquel que es igual a la suma de todos sus divisores propios. Por ejemplo, 6 es perfecto ya que $6 = 1 + 2 + 3$.**

**Determinar si 36 es un número perfecto.**

Se suman los divisores propios de 36 y se observa si el resultado es igual a 36.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 = 55$$

Entonces, como el resultado no es igual que el número se determina que 36 no es un número perfecto.

## 2.3 Criterios de divisibilidad

Actividades | Recurso imprimible

Los **criterios de divisibilidad** son reglas que permiten determinar si un número es divisible entre otro, sin necesidad de ejecutar la división.

En la siguiente tabla se presentan los criterios de divisibilidad de uso más frecuente:

| Divisibilidad entre | Criterio |
|---|---|
| Dos | Si la última cifra es par. |
| Tres | Si la suma de sus cifras es múltiplo de tres. |
| Cuatro | Si sus dos últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de cuatro. |
| Cinco | Si la última cifra es cero o cinco. |
| Seis | Si es divisible entre dos y entre tres. |
| Nueve | Si la suma de sus cifras es múltiplo de nueve. |
| Diez | Si la última cifra termina en 0. |

**La historia de las matemáticas**

El matemático francés Blaise Pascal en el siglo XVII propuso las reglas para determinar la divisibilidad entre cualquier número.

**Recuerda que...**

0 es un número par.

### EJEMPLOS

**1. Determinar si 480 es divisible entre 2, 3, 4, 5 y 6.**

- 480 es divisible entre 2 porque es cifra par.
- 480 es divisible entre 3 porque $4 + 8 + 0 = 12$ y 12 es múltiplo de 3.
- 480 es divisible entre 4 porque sus dos últimas cifras forman el número 80 y 80 es múltiplo de 4.
- 480 es divisible entre 5 porque termina en cero.
- 480 es divisible entre 6 porque es divisible entre 2 y entre 3.

**2. Determinar todas las cifras que hacen que la expresión "793*x* es divisible entre 3" sea verdadera.**

Se quiere que $793x$ sea divisible entre 3, entonces, la suma de todas las cifras debe ser múltiplo de 3. En este caso se remplaza la $x$ por números de cero a nueve para determinar cuáles sumas hacen que el número sea un múltiplo de 3.

Si $x = 0$, 7.930 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 0 = 19$ y 19 no es múltiplo de 3.

Si $x = 1$, 7.931 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 1 = 20$ y 20 no es múltiplo de 3.

Si $x = 2$, 7.932 es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 2 = 21$ y 21 es múltiplo de 3.

Si $x = 3$, 7.933 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 3 = 22$ y 22 no es múltiplo de 3.

Si $x = 4$, 7.934 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 4 = 23$ y 23 no es múltiplo de 3.

Si $x = 5$, 7.935 es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 5 = 24$ y 24 es múltiplo de 3.

Si $x = 6$, 7.936 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 6 = 25$ y 25 no es múltiplo de 3.

Si $x = 7$, 7.937 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 7 = 26$ y 26 no es múltiplo de 3.

Si $x = 8$, 7.938 es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 8 = 27$ y 27 es múltiplo de 3.

Si $x = 9$, 7.939 no es divisible entre 3, ya que:

$7 + 9 + 3 + 9 = 28$ y 28 no es múltiplo de 3.

Luego, las cifras que hacen que la expresión sea verdadera son 2, 5 y 8.

**3. Los números de las camisetas de cinco jugadores son de dos dígitos. Además, dos de los cinco números son divisibles entre 9 y entre 2 pero no entre 10 ni entre 4. Y los otros tres son divisibles entre 10 y entre 3. ¿Cuáles son los números de las cinco camisetas?**

**Primero,** se buscan los números de dos cifras que sean divisibles entre 9 y 2: 18, 36, 54, 72 y 90.

**Luego,** a los números anteriores se les quita los divisibles entre 10 y entre 4. Los números que quedan son 18 y 54.

**Finalmente,** se buscan los números de dos cifras que sean divisibles entre 10 y entre 3: 30, 60 y 90.

Por tanto, los números de las camisetas de los jugadores son 18, 30, 54, 60 y 90.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

**Responde las preguntas. Luego, justifica la respuesta.**

**31.** ¿6 es divisor de 3?

**32.** Si $A$ es divisor de $B$ y $B$ es a su vez divisor de $C$, entonces, ¿es posible que $A$ sea divisor de $C$?

**33.** Si $A$ es divisor de $B$, ¿es posible que $B$ sea divisor de $A$?

**Determina por extensión los siguientes conjuntos.**

**34.** $D_9 = \{x/x$ es divisor de $9\}$

**35.** $D_{30} = \{x/x$ es divisor de $30\}$

**36.** $D_{42} = \{x/x$ es divisor de $42\}$

**Determina el valor de $a$ en cada caso.**

**37.** $D_a = \{1, 2, 4, 8\}$

**38.** $D_a = \{1, 7\}$

**39.** $D_a = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

**Escribe V, si la afirmación es verdadera y F, si es falsa. Justifica la respuesta.**

**40.** El conjunto de divisores de un número es infinito. ( )

**41.** Algunas veces un número es divisor de sí mismo. ( )

**42.** Todo número puede dividirse entre 1. ( )

**43.** Algunos números pueden dividirse entre 1. ( )

**Subraya el número o los números que no hacen parte del conjunto.**

**44.** $D_{20} = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 20\}$

**45.** $D_{30} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 30\}$

**46.** $D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40\}$

**47. Completa la siguiente tabla.**

| | Divisibilidad entre | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Números** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| 29 | ✓ | ✗ | | | | | |
| 136 | | | | | | | |
| 2.598 | | | | | | | |
| 15.876 | | | | | | | |
| 325.860 | | | | | | | |
| 2.266.810 | | | | | | | |

**Determina si los números dados en cada caso son divisibles entre 6, 9 y 10 al mismo tiempo.**

**48.** 368

**49.** 480

**50.** 1.230

**51.** 2.300

**52.** 4.598

**53.** 12.567

**Escribe un número que cumpla con cada grupo de condiciones.**

**54.** Impar, divisor de 45, mayor que 10 y menor que 20.

**55.** Par, divisor de 56, mayor que 7 y menor que 17.

**Lee la siguiente información.**

Dos números son **amigos** cuando la suma de los divisores propios de cada número, da como resultado el otro número. Por ejemplo, los números 220 y 284 cumplen esa propiedad ya que:

$D_{220} = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

$D_{284} = \{1, 2, 4, 71, 142\}$

$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

Luego, los números 220 y 284 son amigos.

Determina si cada par de números son amigos.

**56.** 1.184 y 1.210

**57.** 17.296 y 18.416

**Resuelve.**

**58.** En una clase hay 35 estudiantes. ¿De cuántas formas se pueden agrupar, para realizar un trabajo de matemáticas, de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de estudiantes?

**59.** Con 80 cuadrados, ¿cuántos rectángulos de formas distintas y sin que sobren cuadrados se pueden formar?

**60.** Una fábrica produce cierta cantidad diaria de galletas que empacan en cajas de tal forma que la cantidad de galletas de cada caja es divisible entre 10 y 11 y no es mayor que 130 galletas. Si utilizan 1.300 cajas, ¿cuántas galletas se producen en un día?

# 3. Números primos y números compuestos

Actividad Recurso imprimible

## 3.1 Números primos

Un número natural es **primo** si y sólo si tiene exactamente dos divisores diferentes que son 1 y él mismo.

En símbolos se escribe: $a$ es primo si y sólo si $D_a = \{1, a\}$. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11 y 13.

## 3.2 Criba de Eratóstenes

Ampliación multimedia

Para hallar los números primos, Eratóstenes, famoso matemático del siglo III a. C., ideó un método conocido como la **criba de Eratóstenes**, tabla que permite hallar los números primos hasta determinado número. Para hallar los números primos que hay entre uno y cien, se construye esta tabla teniendo en cuenta los siguientes pasos:

Primero, se escriben los números naturales de uno hasta cien y luego, se tacha el número 1. A partir del número 2, se tachan los múltiplos de 2 sin el 2. Así:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Luego, se tachan los múltiplos de 3, 5 y 7 (sin 3, 5 y 7) y sus respectivos múltiplos.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Así, los números que quedan sin tachar son los primos que hay entre 1 y 100. En conclusión, los números primos menores que 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

## 3.3 Números compuestos

Un número natural es **compuesto** si tiene más de dos divisores distintos.

Por ejemplo, el número 4 es compuesto porque los divisores de 4 son 1, 2 y 4.

En la criba de Eratóstenes, toda la serie de números sombreados (sin contar el 1) son números compuestos.

Ni el uno ni el cero se consideran primos porque el 1 tiene un único divisor que es él mismo, y el cero tiene infinitos divisores.

### EJEMPLOS

**1. Determinar cuáles participantes fueron los finalistas del *reality* teniendo en cuenta que quedaron aquellos que tienen en su escarapela números primos.**


Para determinar quiénes fueron los finalistas se debe determinar cuáles escarapelas tienen números primos. Para ello se mira el conjunto de divisores de cada número utilizando los criterios de divisibilidad.

- El conjunto de divisores de 27 es $D_{27} = \{1, 3, 9, 27\}$. Luego, 27 es un número compuesto ya que tiene más de dos divisores diferentes.
- El conjunto de divisores de 13 es $D_{13} = \{1, 13\}$. Luego, 13 es un número primo ya que tiene solo dos divisores diferentes.
- El conjunto de divisores de 57 es $D_{57} = \{1, 3, 19, 57\}$. Luego, 57 es un número compuesto ya que tiene más de dos divisores diferentes.
- El conjunto de divisores de 29 es $D_{29} = \{1, 29\}$. Luego, 29 es un número primo ya que tiene solo dos divisores diferentes.

Entonces los finalistas del *reality* fueron Diana y Andrés.

**2. Determinar si la afirmación es verdadera o si es falsa.**

**a. Todos los números primos son impares.**

Esta afirmación es falsa ya que 2 es un número primo y es par.

**b. El producto de un número primo con otro primo distinto no es número primo.**

Esta afirmación es verdadera, porque el producto de dos números primos tiene como divisores por lo menos a 1, a uno de los números, al otro número y al producto de los números. Es decir, tendría por lo menos cuatro divisores distintos. Por ello, sería un número compuesto, no un número primo.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

**Responde.**

**61.** ¿Cuántos divisores tiene el cero?

**62.** ¿El cero es un número primo?

**63.** ¿Todos los números impares mayores que 9 son primos?

**64.** ¿Cuáles son los números primos que hay entre 50 y 100?

**65.** ¿En dónde hay más números primos: entre 30 y 40 o entre 60 y 70?

**Escribe un número que cumpla cada condición.**

**66.** Primo y par.

**67.** Compuesto y par.

**68.** Primo e impar.

**69.** Compuesto e impar.

**Completa cada expresión con las palabras "todos", "algunos" o "ningún" y con los ajustes necesarios para que sea verdadera.**

**70.** ________ números pares son primos.

**71.** ________ números impares son primos.

**72.** ________ números pares son compuestos.

**73.** ________ números impares son compuestos.

**Determina por extensión cada conjunto.**

**74.** $A = \{x/x$ es un número primo menor que $50\}$

**75.** $A = \{x/x$ es primo mayor que 20 y menor que $80\}$

**76.** $A = \{x/x$ es divisor de 18 y es primo$\}$

**77.** $A = \{x/x$ es divisor de 50 y es compuesto$\}$

**78.** $A = \{x/x$ es divisor de 24 y es compuesto$\}$

**Lee la siguiente información.**

Los números primos gemelos son aquellos que tienen diferencia 2. Por ejemplo, 3 y 5 son primos gemelos, ya que $5 - 3 = 2$.

Determinar en cuál de los siguientes intervalos de números existen primos gemelos.

**79.** Entre 10 y 20.

**80.** Entre 50 y 80.

**81.** Entre 20 y 40.

**82.** Entre 20 y 100.

**Responde y justifica tu respuesta.**

**83.** ¿Es posible encontrar un número primo que sea igual a tres veces el menor número primo aumentado en 13? De ser posible determínalo.

**Lee la siguiente información. Luego, resuelve.**

El matemático Christian Goldbach formuló la siguiente conjetura: todo número natural par, mayor que 2, se puede escribir como la suma de dos números primos.

Escribe los siguientes números como la suma de dos números primos.

**84.** 34

**85.** 56

**86.** 86

**87.** 102

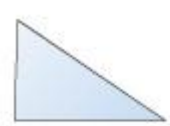
**88.** 64

**89.** 98

**90. Observa lo que dice cada niño. Luego, determina el valor de verdad de las afirmaciones de cada uno y explica el porqué.**


**Resuelve.**

**91.** Las medidas de los lados de un triángulo son tres números primos consecutivos. Si el perímetro del triángulo es 41, ¿cuánto miden sus lados?



**Lo que viene...**

En las siguientes páginas aprenderás a qué se le denomina factorización de un número y dos métodos para hacerla.

Recurso imprimible    Ampliación multimedia

# 4. Factorización de un número

**Factorizar** un número significa expresar dicho número como un producto de números primos.

La factorización de un número también se conoce con el nombre de descomposición en factores primos.

Todo número compuesto se puede factorizar utilizando dos métodos: realizando un diagrama de árbol o efectuando divisiones sucesivas entre sus divisores primos.

## EJEMPLOS

**1. Factorizar el número 24 utilizando un diagrama de árbol.**

| | |
|---|---|
| $24$ | Se escribe el número dado. |
| $2 \times 12$ | Se buscan dos números cuya multiplicación sea 24. |
| $2 \times 2 \times 6$ | Se buscan dos números cuya multiplicación sea 12. |
| $2 \times 2 \times 2 \times 3$ | Se buscan dos números cuya multiplicación sea 6. |

La descomposición de 24 en factores primos es:

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3.$$

También se puede expresar esta multiplicación utilizando potenciación, ya que hay un factor que es un número primo y se repite, entonces,

$$24 = 2^3 \times 3.$$

**2. Descomponer en factores primos el número 36 utilizando divisiones sucesivas.**

Para factorizar 36, se divide entre la serie de números primos (2, 3, 5, 7,…) tantas veces como se pueda hasta obtener como cociente la unidad. Para determinar entre cuáles números se puede dividir, se utilizan los criterios de divisibilidad.

| | | |
|---|---|---|
| 36 | 2 | 36 es divisible entre 2. |
| 18 | 2 | 18 es divisible entre 2. |
| 9 | 3 | 9 es divisible entre 3. |
| 3 | 3 | 3 es divisible entre 3. |
| 1 | | |

La descomposición de 36 en factores primos es: $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

**3. Encontrar el número según las condiciones: es un divisor de 48, no es múltiplo de 4, no es primo, no es un divisor de 50.**

Si es un divisor de 48, entonces, puede ser 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 o 48.

Como no es un múltiplo de 4, entonces, pueden ser 1, 2, 3 o 6.

Como no es primo pueden ser 1 o 6.

Y finalmente, como no es un factor de 50, entonces, es el número 6.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

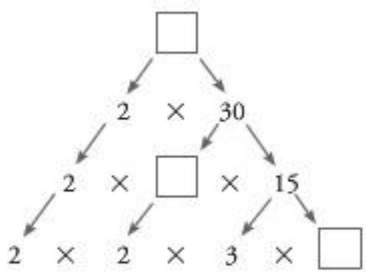
Responde las siguientes preguntas. Justifica tu respuesta.

**92.** ¿La descomposición en factores primos de 30 es $6 \times 5$?

**93.** ¿La descomposición del número 90 en factores primos es $2 \times 5 \times 3 \times 3$?

**94.** ¿La descomposición en factores primos de 176 es $23 \times 11$?

**95.** **Completa el siguiente diagrama de árbol.**




**Elabora un diagrama de árbol de factores primos para los siguientes números.**

**96.** 87 **100.** 72

**97.** 130 **101.** 96

**98.** 300 **102.** 7.020

**99.** 2.500 **103.** 30.030

**Descompón en factores primos los siguientes números utilizando divisiones sucesivas.**

**104.** 34 **108.** 110

**105.** 250 **109.** 1.500

**106.** 1.000 **110.** 3.600

**107.** 5.600 **111.** 7.200

**Escribe los siguientes números como la suma de dos números primos:**

**112.** 32 **113.** 38 **114.** 28 **115.** 24

**Determina si la descomposición en factores primos es correcta.**

**116.** $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

**117.** $96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

**118.** $29.400 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$

**Determina cuántos factores primos diferentes tiene por divisores cada número.**

**119.** 25 **122.** 29 **125.** 250

**120.** 49 **123.** 36 **126.** 690

**121.** 26 **124.** 100 **127.** 1.250

**Escribe el número que corresponde a cada descomposición en factores primos.**

**128.** $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 =$ ____________

**129.** $3^2 \times 5^3 \times 7 =$ ____________

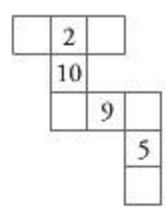
**130.** $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 29 =$ ____________

**Responde las siguientes preguntas. Justifica tu respuesta.**

**131.** ¿El producto de dos números primos es otro número primo?

**132.** ¿El cociente de dos números primos es otro número primo?

**133.** **¿Es posible agregar un dígito en cada casilla del arreglo para que la suma de cada fila y columna de tres números sea un número primo?**




**Completa con el número correspondiente.**

**134.** ___ es un número primo que tiene dos dígitos y la suma de sus dígitos ___ también es un número primo.

**135.** ___ es un número de tres dígitos diferentes que es divisible entre cada uno de sus dígitos.

**136.** ___ es un número primo de dos dígitos, menor que 50 y mayor que 45.

**Observa el ejemplo. Luego, descompón cada uno de los números como la suma de números cuadrados si es posible.** $35 = 5^2 + 3^2 + 1^2$

**137.** $73 =$ ____________

**138.** $137 =$ ____________

## 5. Máximo común divisor

Actividad · Ampliación multimedia

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de dichos números. Si *a*, *b* y *c* son números naturales, el máximo común divisor de *a*, *b*, *c* se simboliza mcd $(a, b, c)$.

**Recuerda que…**

Dos números *a* y *b* son primos relativos si mcd $(a, b) = 1$.

Existen dos métodos para hallar el máximo común divisor de dos o más números: utilizando los conjuntos de divisores o descomponiendo los números en factores primos.

Para hallar el máximo común divisor, con los conjuntos de divisores, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se hallan todos los divisores de cada número.
- **Luego,** se buscan los divisores comunes de los conjuntos de divisores.
- **Finalmente,** se busca el mayor de los divisores comunes. Este es el máximo común divisor.

Para hallar el máximo común divisor, descomponiendo en factores primos, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se descompone cada número en factores primos.
- **Luego,** se escogen los factores comunes, elevados al menor exponente.
- **Finalmente,** se realiza la multiplicación de esos factores comunes. El producto es el máximo común divisor de los números.

### EJEMPLOS

**1. Determinar el máximo común divisor de 18 y 24, a partir de los conjuntos de divisores.**

**Primero,** se hallan todos los divisores de cada número.

$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ $\qquad$ $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

**Luego,** se buscan los divisores comunes: 1, 2, 3 y 6.

**Finalmente,** se tiene que el máximo común divisor es el mayor de los divisores comunes, es decir, mcd $(18, 24) = 6$.

**Matemáticamente**

¿Cómo se puede hallar el mcd (18, 24) descomponiendo cada número en factores primos?

**2. Daniel quiere dividir una cartulina de 40 cm de largo y 30 cm de ancho en cuadrados con la mayor área posible, sin que sobre cartulina. ¿Cuánto debe medir el lado de cada cuadrado?**

Para encontrar la medida del lado de cada cuadrado se halla el máximo común divisor de 40 y 30, así:

**Primero,** se descompone en factores primos cada número.

**Luego,** se determinan los factores comunes elevados al menor exponente: 2 y 5.

**Finalmente,** se realiza la multiplicación de los factores comunes, con lo cual se obtiene que el mcd $(40, 30) = 10$.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Por tanto, el lado de cada cuadrado debe medir 10 cm. De esta forma se puede dividir la cartulina en cuadrados con la mayor área posible sin que sobre cartulina.

## 5.1 Método abreviado para hallar el máximo común divisor

Actividad

Para hallar el mcd de dos o más números se pueden descomponer los números, de manera simultánea, únicamente en factores primos comunes. El máximo común divisor será el producto de sus factores comunes.

### EJEMPLOS

**1. Hallar el mcd de 72 y 180 usando el método abreviado.**

Primero, se descomponen los números de manera simultánea, en factores primos comunes únicamente.

$$\begin{array}{cc|c} 72 & 180 & 2 \\ 36 & 90 & 2 \\ 18 & 45 & 3 \\ 6 & 15 & 3 \\ 2 & 5 & \end{array}$$

Luego, se calcula el producto de los factores comunes:

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$

Finalmente, se tiene que el mcd (72, 180) = 36.

**2. El piso de un salón tiene forma rectangular de 16 metros de largo por 12 metros de ancho.**

**Si se quisiera cubrir con baldosas cuadradas del mayor tamaño posible, ¿cuántas baldosas se necesitarían?**

Primero, se halla el mcd de 16 y 12, así:

$$\begin{array}{cc|c} 16 & 12 & 2 \\ 8 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & \end{array}$$

Segundo, se calcula el producto de los factores comunes con lo cual se obtiene que el mcd (16, 12) = 4.

Luego, se calcula el área del salón $A_r$ y el área de una de las baldosas $A_b$.

$$A_r = 16 \times 12 = 192 \qquad A_b = 4 \times 4 = 16$$

Finalmente, se divide el área del piso entre el área de cada baldosa.

$$192 \div 16 = 12$$

Por tanto, para cubrir el piso del salón se necesitarían 12 baldosas de 4 metros de lado.

**3. Determinar el máximo común divisor de 16, 18 y 24.**

Se realiza la descomposición simultánea únicamente en factores primos comunes.

$$\begin{array}{ccc|c} 16 & 18 & 24 & 2 \\ 8 & 9 & 12 & \end{array}$$

En este caso el mcd (16, 18, 24) = 2, porque es el único factor primo que divide simultáneamente a los tres números.

**4. En una floristería se tienen 120 rosas blancas, 360 rosas rojas y 280 rosas amarillas y se quiere formar ramos con la mayor cantidad de rosas de un mismo color.**

**a. ¿Cuál es el mayor número de rosas que debe ir en cada ramo, de tal forma que no sobre ninguna rosa?**

Primero, se descomponen simultáneamente 120, 360 y 280, en factores primos comunes únicamente.

$$\begin{array}{ccc|c} 120 & 280 & 360 & 2 \\ 60 & 140 & 180 & 2 \\ 30 & 70 & 90 & 2 \\ 15 & 35 & 45 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & \end{array}$$

Luego, se multiplican los factores primos comunes para hallar el máximo común divisor.

$$\begin{aligned} \text{mcd } (120, 280, 360) &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que cada ramo debe estar conformado por 40 rosas del mismo color.

**b. ¿Cuántos ramos se obtienen de cada color?**

Se divide cada cantidad de rosas entre el máximo común divisor, así:

$$120 \div 40 = 3 \qquad 280 \div 40 = 7 \qquad 360 \div 40 = 9$$

Por tanto, se pueden formar 3 ramos de rosas blancas, 7 ramos de rosas amarillas y 9 ramos de rosas rojas.

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

**Responde.**

**139.** ¿Qué es el máximo común divisor de dos números?

**140.** ¿De qué formas se puede hallar el máximo común divisor de dos números?

**Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tus respuestas.**

**141.** El máximo común divisor de dos números puede ser mayor que los números.

**142.** Si $a$ es divisible entre $b$, entonces, mcd $(a, b) = b$.

**143.** El máximo común divisor de dos números puede ser igual a 1.

**144.** Si $a$ es múltiplo de $b$, entonces, mcd $(a, b) = b$.

**Calcula el máximo común divisor de los siguientes números de tres maneras distintas: utilizando los conjuntos de divisores, descomponiendo cada número en factores primos y aplicando el método abreviado.**

**145.** 5 y 30

**146.** 14 y 17

**147.** 72 y 108

**148.** 270 y 900

**149.** 16, 20 y 28

**150.** 45, 54 y 81

**151.** 45, 50 y 55

**152.** 75, 90 y 105

**Determina el valor de $x$ que hace que la igualdad sea verdadera.**

**153.** mcd $(x, 35, 95) = 5$

**154.** mcd $(27, x, 28) = 1$

**155.** mcd $(80, 675, x) = 5$

**156.** mcd $(216, 300, 720) = x$

**Escribe tres números tales que su máximo común divisor cumpla cada una de las siguientes condiciones.**

**157.** Es igual a 1

**158.** Es igual a10

**159.** Es divisible entre 18

**160.** Es múltiplo de 9

**Escribe tres ejemplos numéricos para comprobar cada propiedad.**

**161.** Si mcd $(a, b) = c$, entonces, mcd $(a^2, b^2) = c^2$.

**162.** Si mcd $(a, b) = 1$, entonces, mcd $(a + b, a \cdot b) = 1$.

**163.** Si mcd $(b, c) = 1$, entonces, mcd $(a, b \cdot c) =$ mcd $(a, b) \times$ mcd $(a, c)$.

**Lee y responde.**

**164.** Un terreno con forma rectangular tiene 96 metros de largo y 56 metros de ancho. Si se quiere dividir el terreno en superficies cuadradas que tengan la mayor área posible, ¿cuáles son las dimensiones de cada superficie cuadrada?

**165.** Un carpintero desea construir unos estantes con tablas de 25, 30 y 35 metros de largo. Si los estantes deben tener la mayor longitud posible y no debe sobrar ningún trozo de madera, ¿cuántos estantes puede construir el carpintero?

**166.** En una actividad de integración participan 96 niñas y 112 niños. Hay que formar grupos con igual cantidad de integrantes, de tal forma que cada grupo tenga la misma cantidad de niños y la misma cantidad de niñas. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se puede formar y cómo estarán conformados?

**167.** Verónica dispone de 240 granos de café, 208 semillas de tagua y 272 canutillos para elaborar collares artesanales. Ella quiere elaborar cada collar con un único material, pero todos los collares deben tener la misma cantidad de piezas. ¿Cuántos collares puede elaborar Verónica de cada material, utilizando la mayor cantidad de piezas posible en cada collar, sin que le sobre ninguna pieza?

**Lee y resuelve.**

En una fábrica se confeccionan banderas para el día de la Independencia. Para esto, se utilizan tres rollos de tela de 30, 48 y 72 metros de largo cada uno. Cada rollo de tela debe cortarse en partes iguales de tal forma que no sobre tela y que el largo de la tela empleada para elaborar cada bandera sea el mayor posible.

**168.** ¿Cuál es el largo de la tela que se utiliza para elaborar cada bandera?

**169.** ¿Cuántas banderas se pueden confeccionar?

# 6. Mínimo común múltiplo

Actividad | Ampliaciones multimedia

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes diferente de cero.

Si *a*, *b* y *c* son números naturales, el mínimo común múltiplo de *a*, *b* y *c* se simboliza mcm *(a, b, c)*.

**Matemáticamente**

Si *a* es un número natural, ¿a qué es igual mcm (*a*, 1)?

De manera similar al máximo común divisor, el mínimo común múltiplo se puede calcular de dos formas: utilizando los conjuntos de múltiplos de los números y descomponiendo en factores primos los números.

Para hallar el mínimo común múltiplo, con los conjuntos de múltiplos, se realiza el siguiente procedimiento:

- **Primero,** se escribe el conjunto de múltiplos de cada número.
- **Luego,** se buscan los múltiplos comunes de los conjuntos de los múltiplos.
- **Finalmente,** se busca el menor de los múltiplos comunes diferente de cero.

Para hallar el mínimo común múltiplo, por descomposición en factores primos, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se descomponen los números en sus factores primos.
- **Luego,** se escogen los factores comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.
- **Finalmente,** se realiza la multiplicación de esos factores comunes. Ese es el mcm de los números.

## EJEMPLOS

**1. Determinar el mínimo común múltiplo de 4 y 6 usando los conjuntos de múltiplos de los números.**

**Primero,** se escribe el conjunto de múltiplos de cada número.

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \ldots\}$$

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \ldots\}$$

**Luego,** se buscan los múltiplos comunes de los conjuntos de los múltiplos: 0, 12, 24, 36, 48,…

**Finalmente,** se tiene que el menor de los múltiplos comunes, diferente de cero, es el mínimo común múltiplo, es decir, mcm (4, 6) = 12.

**2. Hallar el mínimo común múltiplo de 45 y 150 descomponiendo cada número en factores primos.**

**Primero,** se descomponen los números en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$45 = 3^2 \times 5$ $\qquad$ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

**Luego,** se eligen los factores comunes y no comunes, elevados al mayor exponente: $2 \times 3^2 \times 5^2$.

**Finalmente,** se realiza la multiplicación de esos factores con lo cual se obtiene el mínimo común múltiplo.

$$\text{mcm } (45, 150) = 2 \times 3^2 \times 5^2 = 450$$

## 6.1 Método abreviado para hallar el mínimo común múltiplo

Actividad

Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números, se pueden descomponer, simultáneamente los números en factores primos. En este caso, el mínimo común múltiplo es el producto de todos los factores que resultan en la descomposición. Es necesario tener en cuenta que para realizar la descomposición se debe analizar la divisibilidad de los números según los criterios de divisibilidad.

### EJEMPLOS

**1. Hallar el mínimo común múltiplo de 56 y 84 usando el método abreviado.**

**Primero,** se descomponen simultáneamente los números en factores primos.

**Luego,** se calcula el producto de los factores que resultan en la descomposición.

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 168$$

**Finalmente,** se tiene que el mcm (56, 84) = 168.

| | | |
|---|---|---|
| 56 | 84 | 2 |
| 28 | 42 | 2 |
| 14 | 21 | 2 |
| 7 | 21 | 3 |
| 7 | 7 | 7 |
| 1 | 1 | |

**2. Determinar si la igualdad mcm (36, 48, 60) = 360 es verdadera o falsa.**

**Primero,** se descomponen simultáneamente los números en factores primos.

**Luego,** se calcula el producto de todos los factores primos que resultan en la descomposición.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 720$$

**Finalmente,** se tiene que el mcm (36, 48, 60) = 720. Por tanto, mcm (36, 48, 60) = 360 es falsa.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 | 48 | 60 | 2 |
| 18 | 24 | 30 | 2 |
| 9 | 12 | 15 | 2 |
| 9 | 6 | 15 | 2 |
| 9 | 3 | 15 | 3 |
| 3 | 1 | 5 | 3 |
| 1 | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | |

**3. Como parte de un programa de salud, tres profesionales visitan a una comunidad indígena de la siguiente manera: el médico asiste cada 12 días, el odontólogo cada 20 días y la enfermera cada 6 días. Si los tres profesionales se encontraron hoy, ¿cuántos días deben pasar como mínimo para que se vuelvan a encontrar los tres?**

Para resolver el problema se debe hallar el mínimo común múltiplo de 6, 12 y 20. Para esto, se realizan los siguientes pasos:

**Primero,** se descomponen los números en factores primos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 12 | 20 | 2 |
| 3 | 6 | 10 | 2 |
| 3 | 3 | 5 | 3 |
| 1 | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | |

**Luego,** se multiplican los factores primos que resultan en la descomposición, para calcular el mínimo común múltiplo.

$$\text{mcm } (6, 12, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$$

## Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

**Responde.**

**170.** ¿Cuál es la diferencia entre el método abreviado para hallar el máximo común divisor y el método abreviado para hallar el mínimo común múltiplo?

**171.** ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de dos números $a$ y $b$, si $a$ es múltiplo de $b$?

**Lee y responde.**

*El teorema fundamental de la aritmética es una proposición que afirma que todo número natural se puede expresar de una única forma como producto de números primos.*

**172.** A partir del teorema fundamental de la aritmética, ¿cómo se puede argumentar que el mínimo común múltiplo de dos números es único? Justifica tu respuesta con un ejemplo.

**Calcula el mínimo común múltiplo de los siguientes números utilizando los conjuntos de múltiplos, descomponiendo en factores primos cada número y aplicando el método abreviado.**

**173.** 24 y 38

**174.** 27 y 16

**175.** 18 y 45

**176.** 72 y 10

**177.** 12, 15 y 18

**178.** 6, 30 y 42

**179.** 10, 20 y 30

**180.** 9, 14 y 21

**181. Completa la siguiente tabla y resuelve.**

| $a$ y $b$ | mcm | mcd | $a \times b$ | mcm × mcd |
|---|---|---|---|---|
| 6 y 14 | | | | |
| 20 y 32 | | | | |
| 18 y 21 | | | | |
| 4 y 22 | | | | |
| 9 y 15 | | | | |

**182.** Escribe una regla general que relacione el producto de dos números $a$ y $b$ con el producto de mcm $(a, b)$ por mcd $(a, b)$.

**Determina el valor $x$ que hace que la igualdad sea verdadera.**

**183.** mcm $(36, x, 90) = 180$

**184.** mcm $(45, 54, x) = 540$

**Escribe tres ejemplos numéricos para comprobar cada expresión.**

**185.** Si mcd $(a, b) = 1$, entonces, mcm $(a, b) = ab$.

**186.** mcm $(a, b) = (a \times b) \div$ mcd $(a, b)$.

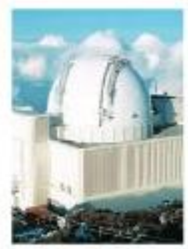
**187.** Si $b$ es múltiplo de $a$, entonces, mcm $(a, b) = b$.

**Lee y resuelve.**

**188.** Tres vendedores se turnan para vender su mercancía en un centro comercial. El primero lo hace cada 6 meses; un segundo, cada 7 meses, y un tercero, cada 4 meses. Si hoy se encuentran los tres vendedores, ¿en cuántos meses se volverán a encontrar?

**189.** Se diseñó una piscina de manera que se llene mediante tres tuberías diferentes. La primera tubería vierte 34 litros de agua cada minuto; la segunda, 18 litros de agua cada minuto, y la tercera, 12 litros de agua cada minuto. Si con una sola tubería se puede llenar la piscina en un número exacto de minutos, determina la menor capacidad que puede tener la piscina en litros.

**190.** Según los registros de un observatorio astronómico se sabe que un cometa se acerca a un planeta cada 96 años, y otro, cada 176 años. Supón que ambos cometas se aproximaron al planeta en 1913. Luego, determina los tres años siguientes en los que se volvieron a aproximar ambos cometas.



**191.** Victoria descubrió un hecho curioso en el libro que está leyendo: cada 15 páginas aparece la palabra "silencio", cada 8 páginas aparece la palabra "inocente" y cada 6 páginas está la palabra "libertad". Si en la página 46 aparecen las tres palabras y el libro tiene 456 páginas en total, ¿en qué página volverán a estar las tres palabras?

**192.** En una granja hay un gallo, un canario y un azulejo. Supón que el gallo canta cada 7 minutos, que el canario lo hace cada 14 minutos y el azulejo, cada 22 minutos. Si en este momento cantaran al mismo tiempo las tres aves, ¿en cuántos minutos volverán a coincidir los tres cantos?

EJERCICIOS PARA REPASAR

## Múltiplos de un número

Escribe los 10 primeros múltiplos de cada número.

**193.** $M_8$ = {____________________}

**194.** $M_9$ = {____________________}

**195.** $M_{12}$ = {____________________}

**196.** $M_{23}$ = {____________________}

**Lee y resuelve.**

*"La suma de dos múltiplos de un número es también múltiplo de ese número. Además, si al menos uno de los factores en una multiplicación es múltiplo de un número, el producto también lo es".*

**Marca con ✓ las sumas y los productos que son múltiplos de 7, sin resolver las operaciones.**

**197.** 49 + 15 ☐ **200.** 45 × 60 ☐

**198.** 56 + 35 ☐ **201.** 17 × 54 ☐

**199.** 20 × 70 ☐ **202.** 121 × 56 ☐

**Escribe cinco sumas y cinco multiplicaciones sin resolver, cuyo resultado sea múltiplo de 3.**

**203.** Sumas **204.** Multiplicaciones

## Divisores de un número

**Escribe todos los divisores de cada número.**

**205.** $D_{28}$ = {____________________}

**206.** $D_{74}$ = {____________________}

**207.** $D_{96}$ = {____________________}

**208.** $D_{108}$ = {____________________}

**Resuelve.**

**209.** Subraya los números que son divisibles entre 2, 3, 5, 9 y 10.

450 2.420 3.140 55.080
1.176 6.255 7.920 65.910

**210.** Encierra los números que son divisibles entre 6 y entre 9, sin hacer las divisiones.

7.200 2.100 1.089 56.672 982.134

**211. Escribe D en las casillas que cumplen el criterio de divisibilidad.**

| | Divisibilidad entre | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 9 | 10 |
| 24 | | | | | | | |
| 96 | | | | | | | |
| 104 | | | | | | | |
| 115 | | | | | | | |
| 222 | | | | | | | |
| 405 | | | | | | | |
| 625 | | | | | | | |
| 702 | | | | | | | |
| 900 | | | | | | | |
| 930 | | | | | | | |

**Responde.**

**212.** Si el número 3*a*2 es divisible entre 3, ¿cuáles son los posibles valores de *a*? ____________ .

**213.** Si el número 5*a*3*b* es múltiplo de 3 y de 5, ¿cuáles son los posibles valores de *a* y cuáles son los posibles valores de *b*? ____________ .

**214.** Si el número 2*a*7*b* es divisible entre 2, 3 y 5, ¿cuál es el valor de *a* y cuál es el valor de *b*? ________ .

**215.** Cambia el orden de las cifras de cada número de la tabla para obtener otro con las condiciones pedidas.

| Número | Condición | Número nuevo |
|---|---|---|
| 7.050 | Divisible entre 5 y no divisible entre 10. | |
| 3.200 | Divisible entre 2 y no divisible entre 10. | |
| 4.902 | Divisible entre 3 e impar. | |
| 9.005 | Divisible entre 4. | |
| 5.058 | Divisible entre 5 y entre 9. | |
| 8.226 | Divisible entre 6 y divisible entre 4. | |

## Números primos y números compuestos

**Escribe V, si la proposición es verdadera o F, si es falsa.**

**216.** Todo número compuesto tiene por lo menos un factor primo mayor que 1. ( )

**217.** La suma de dos números primos es un número primo. ( )

**218.** El producto de un número primo y uno compuesto es un número compuesto. ( )

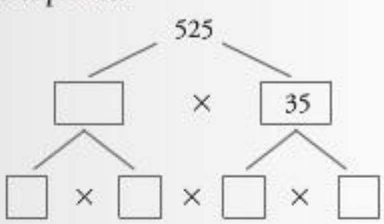
**219.** Todos los números compuestos son pares. ( )

**Marca con una ✗ los números primos.**

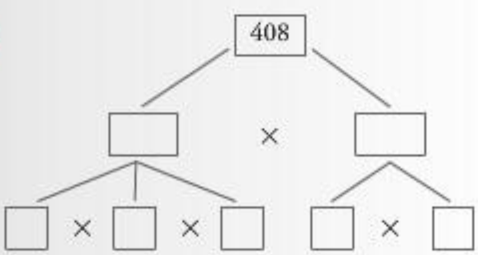
| | | |
|---|---|---|
| **220.** 17 ☐ | **223.** 93 ☐ | **226.** 727 ☐ |
| **221.** 125 ☐ | **224.** 108 ☐ | **227.** 681 ☐ |
| **222.** 153 ☐ | **225.** 507 ☐ | **228.** 863 ☐ |

**Completa los diagramas de cada descomposición en factores primos.**

**229.**




**230.**




**Lee y resuelve.**

Los antiguos griegos probaron que si $2^n - 1$ es primo, entonces, $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ es un número perfecto, verifica esta proposición para los siguientes valores de $n$.

**231.** $n = 3$

**232.** $n = 2$

**233.** $n = 5$

**234.** $n = 7$

## Máximo común divisor

**235. Une con una línea cada pareja de números con su máximo común divisor.**

| Números | mcd |
|---|---|
| 16 y 36 | 2 |
| 18 y 56 | 9 |
| 30 y 54 | 6 |
| 25 y 60 | 5 |
| 9 y 27 | 4 |

**Calcula el máximo común divisor de los siguientes números aplicando el método abreviado.**

**236.** 72, 108 y 600

**237.** 175, 1.225 y 6.125

## Mínimo común múltiplo

**Resuelve.**

**238.** Halla la menor cantidad de dinero que se puede repartir entre 5, 6, 7 o 13 personas, sin que sobre dinero.

**239.** Calcula la menor longitud que se puede medir exactamente con una regla de 30 cm, una de 50 cm y una de 80 cm.

**240.** Encontrar dos posibles valores de $x$ si:
mcm $(x, 48) = 96$.

**Aplica el método abreviado para calcular el mcm de los siguientes números.**

**241.** 24, 60 y 144

**242.** 36, 60, 84 y 96

# PROBLEMAS PARA REPASAR

Un balón de fútbol reglamentario debe tener una masa entre los 410 y los 450 gramos y el perímetro de su circunferencia máxima debe estar entre los 68 y los 70 centímetros. En una fábrica de balones de fútbol un supervisor revisa la masa de un balón cada vez que se fabrican 12 balones y revisa el perímetro de su circunferencia máxima cada vez que se fabrican 18 balones.

**Si en una semana se fabricaron 720 balones, ¿a cuántos balones les revisó la masa y el perímetro de la circunferencia máxima a la vez?**

## Paso 1 Comprende el problema.

**¿Cuál es la pregunta del problema?**

¿A cuántos balones, en la semana, les revisó el supervisor la masa y el perímetro de la circunferencia máxima a la vez?

**¿Cuáles son los datos del problema?**

El supervisor revisa la masa de un balón cada vez que se fabrican 12 balones y revisa el perímetro de la circunferencia máxima cada vez que se han fabricado 18 balones. Además, en la semana se fabricaron 720 balones.

## Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Para encontrar cada cuántos balones el supervisor revisa en forma simultánea la masa de un balón y el perímetro de su circunferencia máxima, se debe calcular el mcm (12, 18), así:

Primero, se descomponen simultáneamente 12 y de 18 en factores primos.

Luego, se multiplican los factores que resultan en la descomposición, con lo cual se obtiene que mcm $(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$.

Finalmente, se tiene que el supervisor revisa, en forma simultánea, la masa y el perímetro de la circunferencia máxima de un balón cada vez que se fabrican 36 balones.

| 12 | 18 | |
|---|---|---|
| 6 | 9 | 2 |
| 3 | 9 | 2 |
| 1 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 3 |

Para determinar la cantidad de balones a los cuales se les ha revisado a la vez la masa y el perímetro en la semana, se divide el número total de balones fabricados entre el mínimo común múltiplo de 12 y 18. Por tanto, se tiene que $760 \div 36 = 20$.

## Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que el mínimo común múltiplo de 12 y 18 es 36. Para esto se pueden escribir los conjuntos de múltiplos de cada número y se escoge el menor múltiplo común, diferente de cero.

$$M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, \ldots\}$$

$$M_{18} = \{0, 18, 36, 54, \ldots\}$$

La división del número total de balones fabricados entre el mcm (12, 18) se puede verificar mediante la multiplicación: $36 \times 20 = 760$.

Entonces, se concluye que en la semana el supervisor les revisó la masa y el perímetro de la circunferencia máxima a la vez a 20 balones.

**Lee cada situación. Luego, responde.**

**243.** Ricardo observó que cuando ordena sus CD agrupándolos de a 2 o de a 3, siempre sobra uno; pero si los agrupa de 5 en 5, no le sobra ninguno. ¿Cuántos CD tiene Ricardo si son más de 80 y menos de 90?

______________________________

**244.** Se tienen dos recipientes: uno con 24 litros de agua y otro con 16 litros. Si se reparte el agua de ambos recipientes equitativamente en varias jarras de igual capacidad, y no sobra nada de agua, ¿qué capacidad tendrán como máximo las jarras?

______________________________

**245.** Cierto país realiza elecciones presidenciales cada 6 años y de alcaldes, cada 4 años. Si en el año 2010 se realizaron elecciones presidenciales y de alcaldes, ¿en qué año volverán a coincidir ambas elecciones?

______________________________

**246.** Se quiere dividir un terreno rectangular de 1.200 m de largo por 800 m de ancho en sectores cuadrados con iguales dimensiones cada uno, y lo más grandes posible. ¿Cuánto debe medir el lado de cada sector?

______________________________

**247.** En un frigorífico se almacenan 18 kg de carne de res, 24 kg de carne de cerdo y 12 kg de carne de pollo. Toda la carne se reparte en recipientes de igual tamaño, de tal forma que en cada recipiente haya la mayor cantidad posible de cada tipo carne. ¿Cuántos kilogramos de carne contiene cada recipiente?

______________________________

**248.** María, Miguel y Mauricio entrenan en una pista circular de ciclismo. María tarda 45 segundos en dar una vuelta, Miguel tarda 50 segundos y Mauricio 48 segundos. En cierto entrenamiento partieron juntos del mismo punto. ¿A los cuántos minutos se volvieron a encontrar los tres en el punto de partida?

______________________________

**249.** Tres relojes digitales se programan para que sus alarmas se activen en un determinado tiempo. El primer reloj suena cada 12 minutos; el segundo, cada 18 minutos y el tercero, cada media hora. Si cierto día, suenan los tres a las 11 a. m., ¿a qué hora volverán a sonar al mismo tiempo?

**Responde las preguntas 250 y 251 de acuerdo con la siguiente información.**

El naipe español tiene 40 cartas y el naipe inglés tiene 52 cartas. Se quiere formar el mayor número posible de "grupos de cartas", donde todos tengan igual cantidad de cartas, con igual cantidad de naipes ingleses e igual cantidad de naipes españoles, sin que sobren cartas de ninguno de los dos tipos.

**250.** ¿Cuántos grupos de cartas se formarán?

______________________________

**251.** ¿Cuántas cartas de cada tipo habrá en cada grupo?

______________________________

**Responde las preguntas 252 y 253 de acuerdo con la siguiente información.**

Un parque de diversiones quiere construir balsas con 3 troncos de palmera, los cuales tienen 15, 9 y 6 metros de longitud. Cada balsa debe tener la mayor longitud posible y no debe sobrar ninguna parte de los troncos.

**252.** ¿Cuál será la longitud de cada balsa?

**253.** ¿Cuántas balsas se construirán?

**Lee y resuelve. Luego, completa.**

**254.** Víctor prepara sorpresas para los invitados a la fiesta de cumpleaños de su hermana. Para esto, cuenta con 160 juguetes, 240 chocolates y 320 galletas. Además, quiere que las sorpresas alcancen para la mayor cantidad posible de personas, de tal forma que cada una tenga la misma cantidad de juguetes, de chocolates y de galletas.

Víctor podrá preparar ________ sorpresas en total. Cada sorpresa tendrá ________ juguetes, ________ chocolates y ________ galletas.

Enlace web Galería de imágenes

# ...Para comprender cómo funciona la seguridad en informática.

Antiguamente se creía que los números primos no tenían una aplicación específica en contextos reales. Sin embargo, en la actualidad son parte fundamental de la criptografía y por eso se aplican para transmitir información digital de manera segura.

La criptografía es la ciencia o el arte de esconder información escribiendo en un lenguaje secreto o en clave que puede ser representado por letras o por números. Existen muchas técnicas para encriptar información, dentro de las cuales se encuentra la criptografía RSA.


La criptografía RSA utiliza tres claves: la primera es una clave pública, la segunda es una clave privada y la tercera es el producto de las dos anteriores. La seguridad de este método radica en que una de las claves es un número compuesto que puede tener más de 200 dígitos y para hallar las otras dos claves se deben encontrar los dos números primos cuyo producto es igual al número compuesto. Incluso utilizando una computadora de alta tecnología, la tarea de factorizar un número de tantas cifras, en dos números primos, podría tardar millones de años.

Un ejemplo en el que se utiliza este tipo de criptografía es en las tarjetas de crédito. Una tarjeta de crédito trae en la parte delantera un número de 16 dígitos. Este número se considera la clave pública y en ella se registra el país, el banco, la oficina y la identificación de cada cliente. La clave privada está registrada en la banda magnética o en un chip, y la tercera clave solo la maneja el banco. Una


de estas claves se identifica con un número compuesto y las otras dos, con números primos.

Por ejemplo, si se supone que una de las claves es 119, que es un número compuesto, para encontrar las otras dos claves se deben hallar los dos números primos que al multiplicarse den como resultado 119. Un computador efectúa este procedimiento realizando todas las posibles combinaciones de números primos que al multiplicarse den este número. Como en este caso el número es de tan solo tres dígitos, las combinaciones que se deben probar son muy pocas para encontrar que los números son 17 y 7.

1. **¿Por qué el producto de dos números primos es su mínimo común múltiplo? Explica tu respuesta.**
2. **Supón que los siguientes números son claves en la criptografía RSA. Luego, halla las otras dos claves.**

   **a.** 77 **c.** 111

   **b.** 85 **d.** 671

3. **El número de combinaciones que debe hacer un computador para descifrar la clave correcta de una tarjeta de crédito viene dada por la expresión $2^n - 1$, donde $n$ representa el número de bits que tiene la clave conocida. Así, si una clave contiene 5 bits (sería una clave muy pequeña), el número de posibles combinaciones que debe realizar es:**

   $$2^5 - 1 = 31$$

   Eso indica que el computador debe realizar 31 combinaciones para encontrar la clave verdadera.

   Halla el número de combinaciones que debe hacer la computadora si una clave tiene:

   **a.** 6 bits **c.** 7 bits

   **b.** 9 bits **d.** 24 bits

# Trabaja con Microsoft Mathematics

**Objetivo:** aplicar el programa Microsoft Mathematics para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números naturales.

**Descripción:** descomponer un número en factores primos. Luego, calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de tres números naturales.

**Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en: www.microsoft.com/downloads**

1. Haz clic en el menú inicio y abre **Microsoft Mathematics**.
2. Selecciona el botón **factor** que aparece en el panel **Estándar** de la calculadora y escribe el número 9216. Haz clic en ) para cerrar paréntesis y presiona la tecla Enter. Aparecerá la descomposición de 9.216 en factores primos.


3. Utiliza Microsoft Mathematics para descomponer 15. 872 y 67. 828 en factores primos.
4. Haz clic en el botón **m.c.d**, que se encuentra en el panel **Estándar** de la calculadora y digita los números 45, 50 y 200, separados por comas. Cierra paréntesis y teclea Enter para que aparezca el máximo común denominador de los tres números.


5. Calcula el mcd de los siguientes números aplicando el método abreviado. Luego, comprueba tus respuestas con Microsoft Mathematics.

**a.** 15 y 70 **c.** 8 y 112 **e.** 55, 45 y 105

**b.** 32 y 64 **d.** 24 y 400 **f.** 343, 245 y 49

6. Haz clic en el botón **m.c.m**, que se encuentra en el panel **Estándar** de la calculadora y digita los números 25, 30, 60 separados por comas. Luego, cierra paréntesis y presiona la tecla Enter. Aparecerá el mínimo común múltiplo de los tres números.


7. Halla el **mcm** de los siguientes números aplicando el método abreviado. Luego, comprueba tus respuestas con Microsoft Mathematics.

**a.** 45 y 50 **c.** 6 y 24 **e.** 3, 17 y 51

**b.** 20 y 16 **d.** 14 y 15 **f.** 7, 21 y 49

8. Puedes cambiar los números en el ícono de la libreta que aparece en la hoja de cálculo. También puedes borrar los anteriores resultados haciendo clic en la imagen de la caneca.